

Κεφάλαιο 4

Μηχανική Του Στερεού Σώματος

Θέμα Α

Πολλαπλής Επιλογής

Στις παρακάτω ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση ή στο σωστό συμπλήρωμά της.

1. [Εσπερ. Λύκειο 2002] Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σ' ένα στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι μηδέν, τότε
 - α. η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται.
 - β. η γωνιακή του ταχύτητα είναι σταθερή.
 - γ. η γωνιακή του επιτάχυνση μεταβάλλεται.
 - δ. η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του μεταβάλλεται.
2. [Εσπερ. Λύκειο 2003] Η μονάδα μέτρησης της στροφορμής είναι

α. $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.	β. $1 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$.	γ. $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.	δ. $1 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}$.
---	---	------------------------------------	---
3. [Ομογενείς 2003] Για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, θα πρέπει
 - α. η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα να είναι μηδέν.
 - β. το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων να είναι μηδέν.
 - γ. η συνισταμένη των δυνάμεων και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων να είναι μηδέν.
 - δ. η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι μηδέν και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων διάφορο του μηδενός.
4. [Εσπ. Λύκειο 2004] Κατά την στροφική κίνηση ενός σώματος
 - α. όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.
 - β. κάθε σημείο του σώματος κινείται με γραμμική ταχύτητα $u = \omega \cdot r$ (ω η γωνιακή ταχύτητα, r η απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής).
 - γ. κάθε σημείο του σώματος έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = u_{\text{cm}}/R$ (u_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας, R η απόσταση του σημείου από το κέντρο μάζας).
 - δ. η διεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας μεταβάλλεται.
5. [Εσπερ. Λύκειο Επαναλ 2004] Εάν η στροφορμή ενός σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα παραμένει σταθερή, τότε η συνολική εξωτερική ροπή πάνω στο σώμα
 - α. είναι ίση με το μηδέν.
 - β. είναι σταθερή και διάφορη του μηδενός.
 - γ. αυξάνεται με τον χρόνο.
 - δ. μειώνεται με τον χρόνο.
6. [Ομογενείς 2004] Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Αν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος υποδιπλασιαστεί, τότε η κινητική του ενέργεια θα
 - α. υποτετραπλασιαστεί.
 - β. υποδιπλασιαστεί.
 - γ. τετραπλασιαστεί.
 - δ. παραμείνει αμετάβλητη.
7. [Εσπερ. Λύκειο 2005] Άνθρωπος βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια και κοντά στο κέντρο οριζόντιου δίσκου που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 γύρω από άξονα κάθετο στο κέντρο του. Αν ο άνθρωπος μετακινηθεί στην περιφέρεια του δίσκου, τότε η γωνιακή του ταχύτητα ω_2 θα είναι:

α. $\omega_2 = \omega_1$.	β. $\omega_2 > \omega_1$.	γ. $\omega_2 < \omega_1$.	δ. $\omega_2 = 0$.
----------------------------	----------------------------	----------------------------	---------------------
8. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2005] Τροχός ακτίνας R κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Αν u_{cm} η ταχύτητα του τροχού λόγω μεταφορικής κίνησης, τότε η ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού που απέχουν από το έδαφος απόσταση ίση με R , έχει μέτρο

α. u_{cm} .	β. $2 \cdot u_{\text{cm}}$.	γ. 0 .	δ. $\sqrt{2} \cdot u_{\text{cm}}$.
----------------------	------------------------------	----------	-------------------------------------

9. [Ομογενείς 2005] Η μονάδα μέτρησης της στροφορμής στο σύστημα S.I. είναι

- α. $1\text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ β. $1\text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ γ. $1\text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ δ. $1\text{ J}\cdot\text{s}$

10. [Ομογενείς 2005] Η περίοδος περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της είναι σταθερή. Αυτό οφείλεται στο ότι η ελκτική δύναμη που δέχεται η Γη από τον Ήλιο

- α. δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονά της.
β. δημιουργεί μηδενική ροπή ως προς τον άξονά της.
γ. έχει την διεύθυνση της εφαπτομένης σε ένα σημείο του Ισημερινού της Γης.
δ. έχει τέτοιο μέτρο που δεν επηρεάζει την περιστροφή της Γης.

11. [Εξετάσεις ΑΣΕΠ 2005] Όταν ο Ήλιος μας καταλήξει κάποτε σ' έναν λευκό νάνο, η ακτίνα του θα μικρύνει περίπου κατά 100 φορές. Η περίοδος της περιστροφής περί τον άξονά του (που είναι σήμερα γύρω στον ένα μήνα): (Δίνεται η ροπή αδράνειας σφαίρας μάζας m και ακτίνας R ως προς τον άξονά της $I_{\sigma\phi} = 2/5 mR^2$.)

- α. θα γίνει 100 φορές μικρότερη β. θα γίνει 1000 φορές μικρότερη
γ. θα γίνει 10000 φορές μικρότερη δ. θα παραμείνει αμετάβλητη

12. [Εξετάσεις ΑΣΕΠ 2005] Μια σφαίρα και ένας κύλινδρος ξεκινούν από την ίδια θέση όπου βρίσκονται σε ακινησία και κυλούν προς τα κάτω (χωρίς να ολισθαίνουν) στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο. Όταν θα διανύσουν το ίδιο μήκος στο κεκλιμένο επίπεδο, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής; (Δίνονται: η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονά της, $I_{\sigma\phi} = 2/5 mR^2$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I_{\text{κυλ}} = 1/2 mR^2$.)

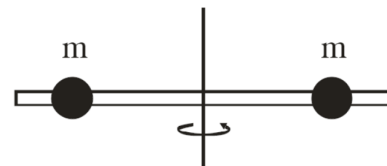
- α. Ο κύλινδρος θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο και αυτό είναι ανεξάρτητο της μάζας και της ακτίνας των αντικειμένων.
β. Το σώμα με την μεγαλύτερη μάζα θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο
γ. Θα διανύσουν την απόσταση και τα δύο συγχρόνως, ανεξάρτητα από την μάζα και την ακτίνα των δύο αντικειμένων
δ. Η σφαίρα θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο και αυτό είναι ανεξάρτητο της μάζας και της ακτίνας των δύο αντικειμένων.

13. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2006] Μία σφαίρα κυλιέται χωρίς ολίσθηση κινούμενη κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου (αρχικά ανέρχεται και στην συνέχεια κατέρχεται).

- α. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της μεταβάλλεται.
β. Η φορά του διανύσματος της στατικής τριβής παραμένει σταθερή.
γ. Η φορά του διανύσματος της γωνιακής επιτάχυνσης μεταβάλλεται.
δ. Η φορά του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας παραμένει σταθερή.

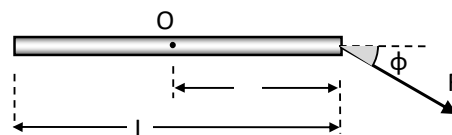
14. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2007] Η ράβδος του σχήματος είναι αβαρής και οι μάζες m απέχουν εξίσου από τον άξονα περιστροφής. Αν η απόσταση των μαζών από τον άξονα περιστροφής υποδιπλασιαστεί, η ροπή αδράνειας του συστήματος:

- α. τετραπλασιάζεται. β. διπλασιάζεται.
γ. υποδιπλασιάζεται. δ. υποτετραπλασιάζεται.



15. [Ομογενείς 2007] Η ράβδος του σχήματος έχει μήκος L και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το μέσο της O και είναι κάθετος σε αυτή. Η ροπή της δύναμης F ως προς το σημείο O έχει μέτρο

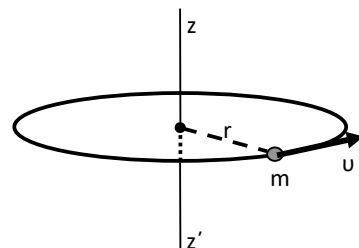
- α. 0. β. $F \frac{L}{2}$. γ. $F \frac{L}{2} \sin\phi$. δ. $F \frac{L}{2} \eta\mu\phi$.



16. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2008] Στην στροφική κίνηση το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών των δυνάμεων, που ασκούνται στο σώμα είναι

- α. ίσο με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.
β. ίσο με την μεταβολή της στροφορμής του σώματος.
γ. πάντα θετικό.

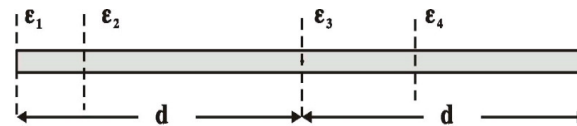
- δ. αντιστρόφως ανάλογο της συνολικής δύναμης που ασκείται στο σώμα.
17. [Εξετάσεις ΑΣΕΠ 2009] Ένας ομογενής οριζόντιος δίσκος Α περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονά του που περνάει από το κέντρο μάζας του. Δύο δίσκοι Β και Γ πανομοιότυποι με τον Α αρχικά σε ηρεμία αφήνονται να πέσουν πάνω στον περιστρεφόμενο δίσκο Α. Η τελική γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα περιστρέφεται το σύστημα των τριών δίσκων θα είναι :
- α. ω β. $\omega/2$ γ. $\omega/3$ δ. $3\omega/2$
18. [Εξετάσεις ΑΣΕΠ 2009] Ένα σκαθάρι αρχικά βρίσκεται στην περιφέρεια ενός οριζόντιου περιστρεφόμενου (χωρίς τριβές) δίσκου γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του δίσκου, Ο. Το σκαθάρι αρχίζει να πλησιάζει τον άξονα περιστροφής κατά μήκος μιας ακτίνας του δίσκου. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή:
- α. Η στροφορμή του συστήματος καθώς και η κινητική του ενέργεια διατηρούνται σταθερές.
β. Η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή, ενώ η κινητική του ενέργεια συνεχώς αυξάνει.
γ. Η στροφορμή του συστήματος μειώνεται ενώ η κινητική του ενέργεια παραμένει σταθερή.
δ. Η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή ενώ η κινητική του ενέργεια συνεχώς μειώνεται.
19. [Εξετάσεις ΑΣΕΠ 2009] Μία συμπαγής σφαίρα ακτίνας R και μάζας M και ροπής αδράνειας $I = \frac{2}{5}MR^2$ ξεκινάει να κυλάει χωρίς ολίσθηση σε ένα κεκλιμένο επίπεδο από ύψος H. Όταν φθάσει στο κατώτερο σημείο Β του κεκλιμένου επιπέδου έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου u_M . Αν μια σημειακή μάζα m ακολουθήσει την ίδια διαδρομή χωρίς τριβή, τότε το μέτρο της ταχύτητάς της στο ίδιο σημείο θα είναι u_m . Ο λόγος των ταχυτήτων u_M/u_m θα είναι :
- α. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ β. $\sqrt{\frac{5}{7}}$ γ. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ δ. 1.
20. [Εσπερ. Λύκειο 2009] Στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, με γωνιακή ταχύτητα ω . Αν διπλασιαστεί η γωνιακή του ταχύτητα, τότε η κινητική του ενέργεια
- α. μένει η ίδια. β. διπλασιάζεται.
γ. τετραπλασιάζεται. δ. οκταπλασιάζεται.
21. [Ομογενείς 2009] Για να ισορροπεί ένα στερεό σώμα, αρκεί
- α. η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν πάνω του να είναι ίση με μηδέν.
β. η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ενεργούν πάνω του να είναι ίση με μηδέν.
γ. η συνισταμένη των δυνάμεων και η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ενεργούν πάνω του να είναι ίση με μηδέν.
δ. το έργο του βάρους του να είναι ίσο με μηδέν.
22. [Εσπ. Λύκειο 2010] Το μέτρο της στροφορμής L ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω και ροπή αδράνειας I, ως προς τον ίδιο άξονα περιστροφής, είναι
- α. $I^2 \cdot \omega$ β. $I \cdot \omega$ γ. $I \cdot \omega^2$ δ. $\sqrt{I \cdot \omega}$
23. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2010] Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος ως προς άξονα περιστροφής
- α. είναι διανυσματικό μέγεθος.
β. έχει μονάδα μέτρησης το $1 \text{ N} \cdot \text{m}$, στο S.I.
γ. δεν εξαρτάται από την θέση του άξονα περιστροφής.
δ. εκφράζει την αδράνεια του σώματος στην περιστροφική κίνηση.
24. [Εσπ. Λύκειο Επαναλ 2010] Γλυκό σημείο μάζας m και ταχύτητας u κινείται σε περιφέρεια οριζόντιου κύκλου ακτίνας r, όπως στο σχήμα: Η στροφορμή του υλικού σημείου ως προς τον άξονα zz' , ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της
- α. είναι μονόμετρο μέγεθος.
β. έχει μέτρο $m \cdot u \cdot r$.
γ. είναι διάνυσμα και έχει διεύθυνση κάθετη στον άξονα zz' .
δ. έχει μονάδα το $\text{kg} \cdot \text{m}$.



25. [Ομογενείς 2010] Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση, τότε η γωνιακή του

- α. ταχύτητα αυξάνεται.
- β. ταχύτητα μένει σταθερή.
- γ. επιτάχυνση αυξάνεται.
- δ. επιτάχυνση μειώνεται.

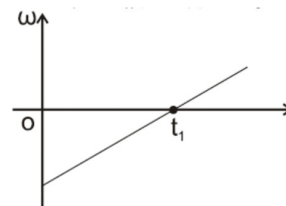
26. [Ημ. & Εσπ. Λύκεια 2011] Η λεπτή ομογενής ράβδος του σχήματος έχει ροπή αδράνειας I_1, I_2, I_3, I_4 ως προς τους παράλληλους άξονες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μικρότερη ροπή αδράνειας είναι η



- α. I_1 .
- β. I_2 .
- γ. I_3 .
- δ. I_4 .

27. [Ημ. & Εσπ. Λύκεια Επαναλ. 2011] Στερεό σώμα στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Η γωνιακή ταχύτητα (ω) μεταβάλλεται με τον χρόνο (t), όπως στο σχήμα:

Η συνισταμένη των ροπών που ασκούνται στο σώμα:



- α. είναι μηδέν την χρονική στιγμή t_1
- β. είναι σταθερή και διάφορη του μηδενός
- γ. είναι σταθερή και ίση με το μηδέν
- δ. αυξάνεται με τον χρόνο.

28. [Ομογενείς 2012] Αν έλιωναν οι πολικοί πάγοι και ανέβαινε λίγο η στάθμη της θάλασσας, τότε

- α. η στροφορμή της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της θα αυξηθεί, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς τον ίδιο άξονα θα παραμείνει σταθερή.
- β. η στροφορμή της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της θα παραμείνει σταθερή, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς τον ίδιο άξονα θα αυξηθεί.
- γ. η στροφορμή της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της θα παραμείνει σταθερή, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς τον ίδιο άξονα θα μειωθεί.
- δ. η στροφορμή της Γης ως προς τον άξονα περιστροφής της θα μειωθεί, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς τον ίδιο άξονα θα παραμείνει σταθερή.

29. [Ημ. & Εσπ. Λύκεια 2014] Σε ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα ασκούνται ομοεπίπεδες δυνάμεις έτσι ώστε αυτό να εκτελεί μόνο επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση. Για την συνισταμένη των δυνάμεων $\Sigma \vec{F}$ που του ασκούνται και για το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών $\Sigma \tau$ ως προς οποιοδήποτε σημείο του, ισχύει:

- α. $\Sigma \vec{F} = 0, \Sigma \tau = 0$
- β. $\Sigma \vec{F} \neq 0, \Sigma \tau \neq 0$
- γ. $\Sigma \vec{F} \neq 0, \Sigma \tau = 0$
- δ. $\Sigma \vec{F} = 0, \Sigma \tau \neq 0$

30. [Ημ. & Εσπ. Λύκεια Επαναλ. 2014] Ένα μηχανικό στερεό περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα περιστροφής. Αν διπλασιαστεί η στροφορμή του στερεού, χωρίς να αλλάξει θέση ο άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο στρέφεται, τότε η κινητική του ενέργεια

- α. παραμένει σταθερή.
- β. υποδιπλασιάζεται.
- γ. διπλασιάζεται.
- δ. τετραπλασιάζεται.

31. [Ομογενείς 2014] Κατά την στροφική κίνηση ενός στερεού γύρω από σταθερό άξονα

- α. η διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής του στερεού μεταβάλλεται.
- β. όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα.
- γ. κάθε σημείο του στερεού έχει γωνιακή ταχύτητα ανάλογη με την απόστασή του από τον άξονα περιστροφής.
- δ. κάθε σημείο του στερεού έχει μέτρο γραμμικής ταχύτητας ανάλογο με την απόστασή του από τον άξονα περιστροφής.

32. [Ημ. & Εσπ. Λύκεια 2015] Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα. Εάν διπλασιαστεί η στροφορμή του, χωρίς να αλλάξει ο άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο αυτό περιστρέφεται, τότε η κινητική του ενέργεια

- α. παραμένει σταθερή.
- β. υποδιπλασιάζεται.
- γ. διπλασιάζεται.
- δ. τετραπλασιάζεται.

33. [Ομογενείς 2015] Η γωνιακή επιτάχυνση ενός ομογενούς δίσκου που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, είναι ανάλογη

- α. με την ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής.

- β. με την μάζα του δίσκου.
- γ. με την ακτίνα του δίσκου.
- δ. με την ροπή που ασκείται στο δίσκο.

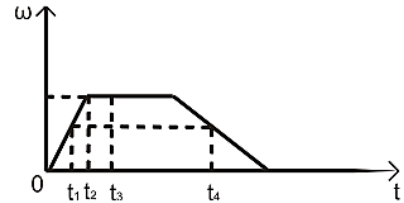
34. [Ημ. & Εσπ. Λύκεια 2016] Ένας δίσκος στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Η τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο παριστάνεται στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή;

α. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης αυξάνεται στο χρονικό διάστημα από t_1 έως t_2 .

β. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης την χρονική στιγμή t_1 είναι μικρότερο από το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης την χρονική στιγμή t_4 .

γ. Την χρονική στιγμή t_3 η γωνιακή επιτάχυνση είναι θετική.

δ. Το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης την στιγμή t_1 έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση που έχει η γωνιακή επιτάχυνση την χρονική στιγμή t_4 .



35. [Ημερ. Λύκεια 2016 (παλαιού τύπου)] Χορεύτρια περιστρέφεται χωρίς τριβές έχοντας τα χέρια της απλωμένα. Όταν η χορεύτρια κατά την διάρκεια της περιστροφής συμπύσσει τα χέρια της, τότε

α. η ροπή αδράνειας της ως προς τον άξονα περιστροφής αυξάνεται

β. η στροφορμή της ως προς τον άξονα περιστροφής της ελαττώνεται.

γ. η συχνότητα περιστροφής αυξάνεται.

δ. η περίοδος παραμένει σταθερή.

36. [Ημ. & Εσπ. Λύκεια Επαναλ. 2016] Μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ περιστρέφεται, χωρίς τριβές, έχοντας τα χέρια της σε σύμπτυξη. Όταν η αθλήτρια, κατά την περιστροφή της, απλώσει τα χέρια της σε οριζόντια θέση, τότε

α. η στροφορμή της μειώνεται.

β. η στροφορμή της αυξάνεται.

γ. η συχνότητα περιστροφής της αυξάνεται.

δ. η συχνότητα περιστροφής της μειώνεται.

37. [Ομογενείς 2016] Σε ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα ασκείται σταθερή ροπή, οπότε αρχίζει να κινείται. Τότε

α. το στερεό σώμα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.

β. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος αυξάνεται συνεχώς.

γ. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος είναι σταθερό.

δ. η στροφορμή του σώματος είναι σταθερή.

38. [Ημ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2017] Ο ομογενής δίσκος του σχήματος ισορροπεί σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Κάποια χρονική στιγμή ασκούμε στον δίσκο ζεύγος δυνάμεων, όπως φαίνεται στο σχήμα.

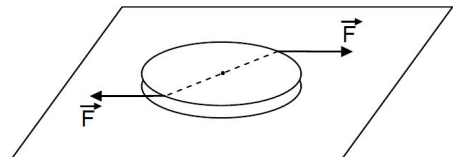
Η κίνηση του δίσκου είναι

α. μόνο στροφική με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

β. μόνο μεταφορική με σταθερή ταχύτητα.

γ. μόνο στροφική με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση.

δ. μόνο μεταφορική με σταθερή επιτάχυνση.



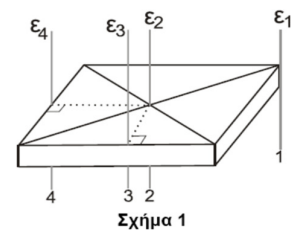
39. [Ημ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2018] Το οριζόντιο ομογενές στερεό του Σχήματος 1 είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και μπορεί να περιστραφεί κάθε φορά γύρω από τους κατακόρυφους παράλληλους άξονες ϵ_1 ή ϵ_2 ή ϵ_3 ή ϵ_4 , με την ίδια σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Το μέτρο της στροφορμής του στερεού έχει την μεγαλύτερη τιμή του όταν το στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα

α. ϵ_1

β. ϵ_2

γ. ϵ_3

δ. ϵ_4



40. [Ημ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2019] Μία από τις μονάδες μέτρησης της στροφορμής των στοιχειωδών σωματιδίων στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) είναι

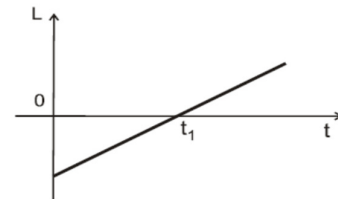
α. $J \cdot s^2$

β. $J \cdot s$

γ. $kg \cdot m^2/s^2$

δ. $kg \cdot m/s^2$.

41. [Ημ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2019] Οριζόντιος δίσκος στρέφεται γύρω από κατακόρυφο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος σε αυτόν. Η στροφορμή L του δίσκου μεταβάλλεται με τον χρόνο, όπως φαίνεται στο **σχήμα 1**. Η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στον δίσκο
- είναι σταθερή και ίση με το μηδέν
 - είναι μηδέν την χρονική στιγμή t_1
 - αυξάνεται με τον χρόνο
 - είναι σταθερή και διάφορη του μηδενός.



Σχήμα 1

42. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια 2020 (παλαιό)] Αθλητής των καταδύσεων από βατήρα, καταφέρνει να κάνει αρκετές περιστροφές στον αέρα μέχρι να βουτήξει στο νερό. Αυτό γίνεται διότι
- δέχεται την ροπή του βάρους του
 - μεταβάλλεται η στροφορμή του
 - μειώνει την ροπή αδράνειάς του συμπύσσοντας τα άκρα του, ώστε να αυξήσει την γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής του.
 - διατηρείται η μηχανική του ενέργεια.
43. [Ημ. & Εσπερ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2020 (νέο & παλαιό)] Ένα στερεό σώμα αρχικά παραμένει ακίνητο, χωρίς να του ασκούνται δυνάμεις. Κάποια χρονική στιγμή ασκούμε δύο δυνάμεις \vec{F}_1 και \vec{F}_2 στο σώμα. Για να εκτελέσει το σώμα μόνο στροφική κίνηση, οι δυνάμεις αυτές θα πρέπει
- να είναι κάθετες μεταξύ τους.
 - να έχουν μη συνευθειακές παράλληλες διευθύνσεις, αντίθετες φορές και άνισα μέτρα.
 - να βρίσκονται στην ίδια ευθεία και να είναι αντίθετες.
 - να έχουν μη συνευθειακές παράλληλες διευθύνσεις, αντίθετες φορές και ίσα μέτρα.
44. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια 2021] Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού σώματος, που εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής
- έχει διεύθυνση κάθετη στον άξονα περιστροφής
 - έχει κατεύθυνση αντίθετη από την κατεύθυνση του διανύσματος της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας
 - έχει κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση του διανύσματος της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας
 - έχει κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση του διανύσματος της αρχικής του γωνιακής ταχύτητας.

Συμπλήρωσης

45. [Εσπερ. Λύκειο 2002] Να γράψετε στο τετράδιό σας τα φυσικά μεγέθη από τη Στήλη I και, δίπλα σε καθένα, την μονάδα της Στήλης II που αντιστοιχεί σ' αυτό.

Στήλη I	Στήλη II
Ροπή αδράνειας I σώματος ως προς άξονα	N·m
Στροφορμή L στερεού σώματος	rad/s
Γωνιακή ταχύτητα ω	kg·m ²
Ροπή δύναμης τ ως προς άξονα	F
Συχνότητα f περιοδικού φαινομένου	kg · $\frac{m^2}{s}$
	Hz

46. [Εν. Λύκειο 2002] Το αλγεβρικό άθροισμα των που δρουν σ' ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.
47. [Ομογενείς 2002] Να γράψετε στο τετράδιό σας τα φυσικά μεγέθη από την **Στήλη I** και δίπλα σε καθένα

την μονάδα της Στήλης II που αντιστοιχεί σ' αυτό.

Στήλη I	Στήλη II
Μήκος κύματος	rad/s ²
Γωνιακή επιτάχυνση	N·m
Ροπή δύναμης	m
Ορμή	kg·m ² /s
Στροφορμή	kg·m/s
	m/s

48. [Εν. Λύκειο 2003] Όταν ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του, λέμε ότι κάνει κίνηση.
49. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2003] Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδέν, τότε η μεταβολή της ολικής στροφορμής του συστήματος είναι
50. [Εσπ. Λύκειο 2004] Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Φυσικό μέγεθος	Μέγεθος*	Μονάδες
Ροπή δύναμης ως προς σημείο.		N.m
Στροφορμή σώματος.		
Γωνιακή ταχύτητα.	Διανυσματικό	
Ροπή αδράνειας ως προς άξονα.		kg· m ²

* Να γράψετε μία από τις λέξεις μονόμετρο ή διανυσματικό.

51. [Ομογενείς 2006] Στον παρακάτω πίνακα, στην **Στήλη I**, αναφέρονται διάφορα φυσικά μεγέθη, ενώ στην **Στήλη II** αναφέρονται μονάδες μέτρησης των μεγεθών στο S.I.
Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης I** και ακριβώς δίπλα σε κάθε αριθμό ένα γράμμα από την **Στήλη II**, ώστε να δημιουργείται σωστή αντιστοίχιση. (Ένα δεδομένο της **Στήλης II** περισσεύει).

Στήλη I	Στήλη II
1. Ροπή αδράνειας	α. rad/s
2. Στροφορμή	β. N·m
3. Γωνιακή ταχύτητα	γ. kg m ²
4. Ροπή δύναμης	δ. m/s
5. Ένταση ηλεκτρικού πεδίου	ε. V/m
	στ. kg·m ² /s

Συνοπτικά - Πάθος

Να χαρακτηρίσετε στο τετράδιό σας τις προτάσεις που ακολουθούν με το γράμμα Σ, αν είναι σωστές ή με το γράμμα Λ, αν είναι λανθασμένες.

52. [Ομογενείς 2002] Όταν ένας ακροβάτης που περιστρέφεται στον αέρα ανοίγει τα άκρα του, αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.
53. [Ομογενείς 2002] Στην μεταφορική κίνηση ενός σώματος κάθε χρονική στιγμή όλα τα σημεία του έχουν την ίδια ταχύτητα.
54. [Εσπερ. Λύκειο 2003] Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι ανάλογη προς την συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται στο σώμα.
55. [Εσπερ. Λύκειο 2003] Αν η στροφορμή ενός στερεού σώματος παραμένει σταθερή, τότε η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται στο σώμα είναι μηδέν.
56. [Ομογενείς 2003] Η στροφορμή ενός στερεού σώματος παραμένει σταθερή, αν το αλγεβρικό άθροισμα ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό είναι διάφορο του μηδενός.

57. [Ημερ. Λύκειο 2004] Η ροπή αδράνειας εκφράζει την αδράνεια στην μεταφορική κίνηση.
58. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2004] Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου που ορίζουν.
59. [Εσπερ. Λύκειο Επαναλ 2004] Η μονάδα μέτρησης της ροπής αδράνειας είναι $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.
60. [Ημερ. Λύκειο 2005] Ένας αθλητής καταδύσεων, καθώς περιστρέφεται στον αέρα, συμπύσσει τα άκρα του. Με την τεχνική αυτή αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.
61. [Ομογενείς 2005] Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα στερεό σώμα είναι μηδέν, τότε το σώμα έχει πάντοτε μηδενική γωνιακή επιτάχυνση.
62. [Ομογενείς 2005] Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι ανεξάρτητη από την θέση του άξονα περιστροφής του.
63. [Ομογενείς 2006] Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδέν η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.
64. [Ημερ. Λύκειο 2007] Η ροπή αδράνειας ενός σώματος σταθερής μάζας έχει πάντα την ίδια τιμή.
65. [Εσπ. Λύκειο 2007] Όταν ο φορέας της δύναμης, η οποία ασκείται σε ένα ελεύθερο στερεό σώμα δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε το σώμα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.
66. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2007] Τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ και της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ έχουν πάντα την ίδια κατεύθυνση.
67. [Ομογενείς 2007] Αν η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται σε ένα σύστημα σωμάτων είναι ίση με μηδέν, η ολική στροφορμή του συστήματος μεταβάλλεται.
68. [Εσπ. Λύκειο 2008] Όταν μια χορεύτρια καλλιτεχνικού πατινάζ, που περιστρέφεται, θέλει να περιστραφεί γρηγορότερα συμπύσσει τα χέρια της.
69. [Ημερ. Λύκειο 2008] Η ροπή αδράνειας ενός στερεού δεν εξαρτάται από την θέση του άξονα περιστροφής του.
70. [Εσπ. Λύκειο 2008] Η Γη έχει στροφορμή λόγω της κίνησής της γύρω από τον ήλιο.
71. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2008] Η ροπή αδράνειας εκφράζει στην μεταφορική κίνηση ό,τι εκφράζει η μάζα στην στροφική κίνηση.
72. [Ομογενείς 2008] Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει μονάδα μέτρησης στο S.I. το $1 \text{ kg}\cdot\text{m}$.
73. [Ημ. Λύκειο 2009] Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος δεν εξαρτάται από τον άξονα περιστροφής του σώματος.
74. [Εσπ. Λύκειο 2009] Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι διανυσματικό μέγεθος.
75. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2009] Η ροπή αδράνειας είναι διανυσματικό μέγεθος.
76. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2009] Η μονάδα μέτρησης του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής στο σύστημα SI είναι το $1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$.
77. [Ομογενείς 2009] Η στροφορμή είναι μονόμετρο μέγεθος.
78. [Ημ. Λύκειο 2010] Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο.
79. [Εσπ. Λύκειο 2010] Η μονάδα της ροπής δύναμης στο SI είναι $\text{N}\cdot\text{m}$.
80. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2010] Όταν ένας αστέρας συρρικνώνεται λόγω βαρύτητας, η γωνιακή ταχύτητά του λόγω ιδιοπεριστροφής αυξάνεται.
81. [Εσπ. Λύκειο Επαναλ 2010] Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.
82. [Ημ. & Εσπ. Λύκειο 2011] Η ροπή αδράνειας είναι διανυσματικό μέγεθος.
83. [Ημ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2011] Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα.
84. [Ημ. Λύκειο Επαναλ. 2011] Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδέν, η ολι-

κή στροφορμή του συστήματος αυξάνεται συνεχώς.

- 85.** [Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2011] Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδέν, η ολική στροφορμή του συστήματος αυξάνεται συνεχώς.
- 86.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο 2012] Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής μετριέται σε $\text{Kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$.
- 87.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο 2012] Σε στερεό σώμα που εκτελεί στροφική κίνηση και το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας αυξάνεται, τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης είναι αντίρροπα.
- 88.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2012] Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα ενός στερεού έχει την μικρότερη τιμή της, όταν ο άξονας αυτός διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού.
- 89.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2012] Μονάδα μέτρησης του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής είναι και το $1\text{N}\cdot\text{m}$.
- 90.** [Ομογενείς 2012] Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.
- 91.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο 2013] Σε στερεό σώμα σφαιρικού σχήματος που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από άξονα διερχόμενο από το κέντρο του ισχύει πάντα $\Sigma\vec{F} = 0$.
- 92.** [Ημ. Λύκειο Επαναλ. 2013] Τα υποθετικά στερεά που δεν παραμορφώνονται, όταν τους ασκούνται δυνάμεις, λέγονται μηχανικά στερεά.
- 93.** [Ημ. Λύκειο Επαναλ. 2013] Μονάδα μέτρησης στροφορμής στο SI είναι το $1\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$.
- 94.** [Ομογενείς 2013] Σε μια μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση στερεού σώματος, τα διανύσματα της γωνιακής επιτάχυνσης και της γωνιακής ταχύτητας έχουν πάντα την ίδια διεύθυνση.
- 95.** [Ομογενείς 2013] Τροχός που κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει έχει κινητική ενέργεια, μόνο λόγω στροφικής κίνησης.
- 96.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο 2014] Η γη έχει στροφορμή λόγω περιστροφής γύρω από τον άξονά της και λόγω περιφοράς γύρω από τον ήλιο.
- 97.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2014] Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου που ορίζουν οι δύο δυνάμεις.
- 98.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2014] Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα, συμπύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους.
- 99.** [Ομογενείς 2014] Η γη έχει στροφορμή μόνο λόγω της κίνησής της γύρω από τον ήλιο.
- 100.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο 2015] Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.
- 101.** [Εσπερ. Λύκειο Επαναλ. 2015] Κυλινδρικό σώμα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του σημείου επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο είναι ίση με την ταχύτητα v_{cm} του κέντρου μάζας του.
- 102.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο 2016 (παλαιού τύπου)] Όταν ένα ποδήλατο κινείται προς τον νότο, η στροφορμή των τροχών ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ένα διάνυσμα με κατεύθυνση προς την ανατολή.
- 103.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2016] Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι διανυσματικό μέγεθος.
- 104.** [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2016 (παλαιού τύπου)] Η ροπή αδράνειας ενός στερεού είναι ανεξάρτητη από την θέση του άξονα περιστροφής.
- 105.** [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2016 (παλαιού τύπου)] Κατά την στροφική κίνηση ενός σώματος όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.
- 106.** [Ομογενείς 2016] Όταν ένας αστέρας συρρικνώνεται, λόγω βαρύτητας, η γωνιακή ταχύτητά του, λόγω περιστροφής, ελαττώνεται.
- 107.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο 2017] Η ροπή μιας δύναμης \vec{F} ως προς άξονα περιστροφής είναι μηδέν, όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής.
- 108.** [Ημ. & Εσπ. Λύκειο 2017] Η κίνηση ενός τροχού που κυλίνεται είναι αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.

109. [Ημ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2017] Το συνολικό έργο της στατικής τριβής στην κύλιση χωρίς ολίσθηση ενός στερεού σώματος είναι ίσο με μηδέν.
110. [Ημ. & Εσπ. Λύκειο 2018] Σε ένα ρολόι με δείκτες η γωνιακή επιτάχυνση του λεπτοδείκτη είναι σταθερή και διάφορη του μηδενός.
111. [Ημ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2018] Αν σε ένα αρχικά ακίνητο ελεύθερο στερεό σώμα ασκηθεί σταθερή δύναμη της οποίας ο φορέας διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα θα περιστραφεί.
112. [Ημ. & Εσπ. Λύκεια 2019] Όταν σε ένα αρχικά ακίνητο και ελεύθερο στερεό σώμα ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού, τότε το στερεό σώμα δεν περιστρέφεται.
113. [Ημ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2019] Όταν ένα ποδήλατο κινείται προς το νότο η στροφορμή των τροχών του, ως προς τον άξονα περιστροφής τους, είναι ένα διάνυσμα με κατεύθυνση προς τη δύση.
114. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια 2020 (παλαιό)] Στην μεταφορική κίνηση ενός στερεού κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.
115. [Ημ. & Εσπερ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2020 (νέο & παλαιό)] Η σύνθετη κίνηση στερεού σώματος μπορεί να μελετηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.
116. [Ημ. & Εσπερ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2020 (νέο & παλαιό)] Η μονάδα μέτρησης της ροπής δύναμης ως προς σημείο ή άξονα είναι το 1 N/m .
117. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια 2021] Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου που αυτές ορίζουν.
118. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια 2022] Αν διπλασιάσουμε το μέτρο καθεμιάς από τις δύο δυνάμεις ενός ζεύγους δυνάμεων, χωρίς να αλλάξουμε την απόσταση των φορέων των δυνάμεων, τότε το μέτρο της ροπής του ζεύγους των δυνάμεων τετραπλασιάζεται.
119. [Ημ. & Εσπερ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2022] Τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης έχουν πάντα την ίδια κατεύθυνση.
-

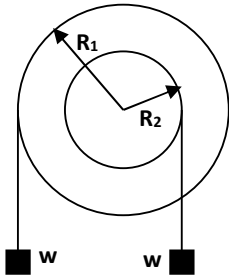
Θέμα Β

1. [Εν. Λύκειο 2002] Δίσκος παιδικής χαράς περιστρέφεται περί κατακόρυφο άξονα κάθετο στο επίπεδό του διερχόμενο από το κέντρο του δίσκου Ο. Στο δίσκο δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη. Ένα παιδί μετακινείται από σημείο Α της περιφέρειας του δίσκου στο σημείο Β πλησιέστερα στο κέντρο του. Τότε ο δίσκος θα περιστρέφεται:

- α. πιο αργά
 - β. πιο γρήγορα.
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 2
Μονάδες 6

2. [Ομογενείς 2002] Στο σχήμα φαίνεται σε τομή το σύστημα δύο ομοαξονικών κυλίνδρων με ακτίνες R_1, R_2 με $R_1 > R_2$ που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος συμπίπτει με τον κατά μήκος άξονα συμμετρίας των κυλίνδρων. Εξαιτίας των ίσων βαρών w που κρέμονται από τους δύο κυλίνδρους, πως θα περιστραφεί το σύστημα;



Μονάδες 2
Μονάδες 6

- α. σύμφωνα με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.
- β. αντίθετα προς την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3. [Εν. Λύκειο 2003] Καλλιτέχνης του πατινάζ περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του, χωρίς τριβές. Στην αρχή ο καλλιτέχνης έχει τα χέρια απλωμένα και στην συνέχεια τα συμπύσσει. Ο καλλιτέχνης περιστρέφεται πιο γρήγορα, όταν έχει τα χέρια:

- α. απλωμένα
- β. συνεπτυγμένα.

Μονάδες 2
Μονάδες 4

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

4. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2003] Να εξηγήσετε γιατί η χρονική διάρκεια της περιστροφής της γης γύρω από τον εαυτό της παραμένει σταθερή, δηλαδή 24 ώρες.

Μονάδες 6

5. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2003] Στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω . Αν η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι I , να αποδείξετε ότι η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω της στροφικής του κίνησης δίνεται από την σχέση $K = \frac{1}{2} I \omega^2$.

Μονάδες 7

6. [Ομογενείς 2003] Δύο ομογενείς δακτύλιοι Α, Β των οποίων το πάχος είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα τους, έχουν την ίδια μάζα και ακτίνες R_A, R_B όπου $R_A > R_B$. Οι δακτύλιοι περιστρέφονται ο καθένας γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους και είναι κάθετος στο επίπεδό τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

α. Ποιος από τους δύο δακτυλίους έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής;

Μονάδες 2
Μονάδες 7

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

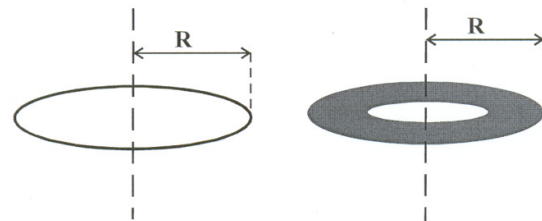
7. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2004] Ένα ομογενές σώμα με κανονικό γεωμετρικό σχήμα κυλίνεται, χωρίς να ολισθαίνει. Η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω της μεταφορικής κίνησης είναι ίση με την κινητική του ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησης γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του. Το γεωμετρικό σχήμα του σώματος είναι:

- α. σφαίρα.
- β. λεπτός δακτύλιος.
- γ. κύλινδρος.

Μονάδες 2
Μονάδες 5

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

8. [Εσπ. Λύκειο 2004] Δακτύλιος και δίσκος με σπή, η μάζα του οποίου είναι ομογενώς κατανομημένη, όπως στο σχήμα, έχουν την ίδια μάζα και την ίδια ακτίνα.



Α. Αν $I_{\Delta\sigma}$ και $I_{\Delta\kappa}$ οι ροπές αδράνειας του δίσκου και του δακτυλίου αντίστοιχα ως προς άξονες κάθετους στο επίπεδό τους που διέρχονται από τα κέντρα τους, τι ισχύει;

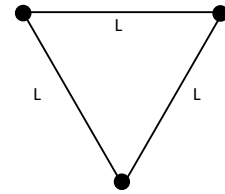
- α. $I_{\Delta\sigma} > I_{\Delta\kappa}$.
- β. $I_{\Delta\sigma} < I_{\Delta\kappa}$.
- γ. $I_{\Delta\sigma} = I_{\Delta\kappa}$

Μονάδες 3

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

9. [Εσπερ. Λύκειο Επαναλ 2004] Τρεις σφαίρες αμελητέων διαστάσεων που η κάθε μία έχει την ίδια μάζα m , συνδέονται μεταξύ τους με ράβδους αμελητέας μάζας και μήκους L , όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από μία από τις σφαίρες. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς αυτόν τον άξονα είναι:



- α. mL^2 β. $2mL^2$ γ. $3mL^2$ **Μονάδες 3**
 Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 5**

10. [Εσπερ. Λύκειο Επαναλ 2004] Σώμα ακίνητο αρχίζει την χρονική στιγμή $t = 0$ να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Αν την χρονική στιγμή t_1 η κινητική ενέργεια λόγω της περιστροφής είναι K_1 και την χρονική στιγμή $t_2 = 2 \cdot t_1$ είναι K_2 , τότε:

- α. $K_2 = 2K_1$ β. $K_2 = 4K_1$ γ. $K_2 = 8K_1$ **Μονάδες 3**
 Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 5**

11. [Ομογενείς 2004] Δύο ομογενείς κυκλικόι δακτύλιοι Δ_1 και Δ_2 με ακτίνες R και $2R$, κυλιόνται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερές γωνιακές ταχύτητες 3ω και ω , αντίστοιχα. Ο λόγος των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των δακτυλίων Δ_1 και Δ_2 είναι

- α. $\frac{3}{2}$ β. $\frac{1}{2}$ γ. 1. **Μονάδες 3**

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **Μονάδες 6**

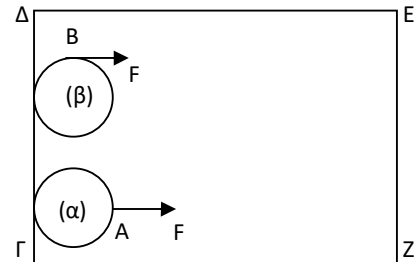
12. [Εσπερ. Λύκειο 2005] Ομογενής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας είναι u_{cm} . Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = (2/5)mR^2$.

A. Η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι

- α. $\frac{2}{5}mu_{cm}^2$ β. $\frac{7}{10}mu_{cm}^2$ γ. $\frac{9}{10}mu_{cm}^2$ **Μονάδες 2**

B. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 4**

13. [Ημερ. Λύκειο 2005] Δύο ίδιοι οριζόντιοι κυκλικόι δίσκοι (α) και (β) μπορούν να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο ορθογώνιο τραπέζι ΓΔΕΖ χωρίς τριβές, όπως στο σχήμα. Αρχικά οι δύο δίσκοι είναι ακίνητοι και τα κέντρα τους απέχουν την ίδια απόσταση από την πλευρά ΕΖ. Ίδιες σταθερές δυνάμεις F με διεύθυνση παράλληλη προς τις πλευρές ΔΕ και ΓΖ ασκούνται σ' αυτούς. Στο δίσκο (α) η δύναμη ασκείται πάντα στο σημείο Α του δίσκου. Στο δίσκο (β) η δύναμη ασκείται πάντα στο σημείο Β του δίσκου. Αν ο δίσκος (α) χρειάζεται χρόνο t_α για να φτάσει στην απέναντι πλευρά ΕΖ, ενώ ο δίσκος (β) χρόνο t_β , τότε:



- α. $t_\alpha > t_\beta$ β. $t_\alpha = t_\beta$ γ. $t_\alpha < t_\beta$ **Μονάδες 4**
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 6**

14. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2005] Υποθέτουμε ότι κλιματολογικές συνθήκες επιβάλλουν την μετανάστευση του πληθυσμού της Γης προς τις πολικές ζώνες. Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της

- α. θα μείνει σταθερή. β. θα ελαττωθεί. γ. θα αυξηθεί. **Μονάδες 2**
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 6**

15. [Ομογενείς 2005] Ένας απομονωμένος ομογενής αστέρας σφαιρικού σχήματος ακτίνας R στρέφεται γύρω από τον εαυτό του (ιδιοπεριστροφή) με συχνότητα f_0 . Ο αστέρας συρρικνώνεται λόγω βαρύτητας διατηρώντας το σφαιρικό του σχήμα και την αρχική του μάζα. Σε κάποιο στάδιο της συρρίκνωσής του η νέα συχνότητα ιδιοπεριστροφής του θα είναι

- α. μεγαλύτερη από την αρχική συχνότητα f_0 .
 β. μικρότερη από την αρχική συχνότητα f_0 .
 γ. ίση με την αρχική συχνότητα f_0 .

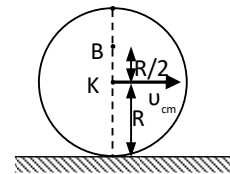
Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμα.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. **Μονάδες 2**
Μονάδες 6

16. [Ημερ. Λύκειο 2006] Σε οριζόντιο επίπεδο ο δίσκος του σχήματος με ακτίνα R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του K είναι u_{cm} . Η ταχύτητα του σημείου που βρίσκεται στην θέση B της κατακόρυφης διαμέτρου και απέχει απόσταση $R/2$ από το K θα είναι

α. $\frac{3}{2}u_{cm}$. β. $\frac{2}{3}u_{cm}$. γ. $\frac{5}{2}u_{cm}$.

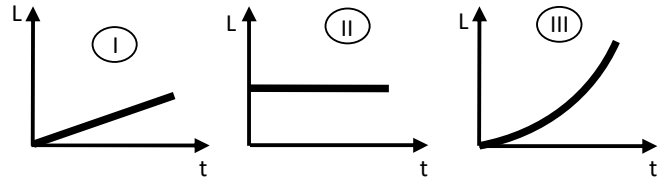
Μονάδες 2



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

17. [Εσπερ. Λύκειο 2006] Ένας κύλινδρος που είναι αρχικά ακίνητος και μπορεί να περιστραφεί γύρω από το σταθερό άξονά του δέχεται την επίδραση σταθερής ροπής. Την στροφορμή του κυλίνδρου σε συνάρτηση με τον χρόνο απεικονίζει το σχήμα



α. I.

β. II.

γ. III.

Μονάδες 3

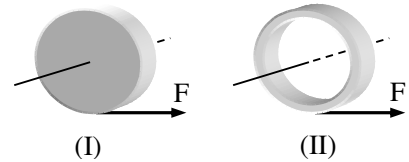
Μονάδες 6

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

18. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2006] Στο σχήμα φαίνεται ένας ομογενής συμπαγής κυκλικός δίσκος (I) και ένας ομογενής συμπαγής κυκλικός δακτύλιος (II), που έχουν την ίδια ακτίνα και την ίδια μάζα. Κάποια χρονική στιγμή ασκούνται στα σώματα αυτά δυνάμεις ίδιου μέτρου, εφαπτόμενες στην περιφέρεια. Οι γωνιακές επιταχύνσεις που θα αποκτήσουν θα είναι

α. $\alpha_I = \alpha_{II}$. β. $\alpha_I < \alpha_{II}$. γ. $\alpha_I > \alpha_{II}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες 2

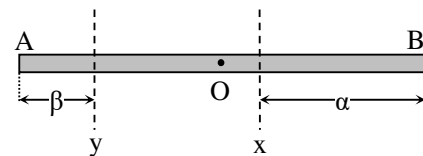
Μονάδες 4

19. [Ομογενείς 2006] Μια λεπτή και ομογενής ράβδος AB μπορεί να περιστρέφεται είτε γύρω από τον άξονα x είτε γύρω από τον άξονα y . Οι άξονες αυτοί είναι κάθετοι στη ράβδο και βρίσκονται εκατέρωθεν του μέσου O της ράβδου. Αν α , β είναι η απόσταση κάθε άξονα από τα άκρα της ράβδου, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ισχύει $\alpha > \beta$ ο λόγος των ροπών αδράνειας της ράβδου I_x , I_y ως προς τους άξονες x, y αντίστοιχα είναι

α. $\frac{I_x}{I_y} = 1$ β. $\frac{I_x}{I_y} > 1$ γ. $\frac{I_x}{I_y} < 1$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή σχέση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

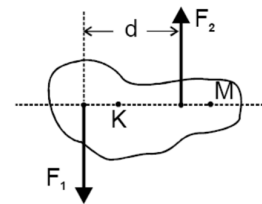


Μονάδες 2

Μονάδες 6

20. [Εσπ. Λύκειο 2007] Η συνολική ροπή των δύο αντίρροπων δυνάμεων F_1 και F_2 του σχήματος, που έχουν ίδιο μέτρο, είναι

- α. μεγαλύτερη ως προς το σημείο K .
β. μεγαλύτερη ως προς το σημείο M .
γ. ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.



Μονάδες 3

Μονάδες 6

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

21. [Εσπ. Λύκειο 2008] Ένας κύβος και μία σφαίρα ίδιας μάζας αφήνονται να κινηθούν από το ίδιο ύψος δύο διαφορετικών κεκλιμένων επιπέδων. Ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβές στο ένα και η σφαίρα κυλιέται χωρίς ολίσθηση στο άλλο. Για τις ταχύτητες του κύβου και του κέντρου μάζας της σφαίρας στην βάση των κεκλιμένων επιπέδων ισχύει ότι

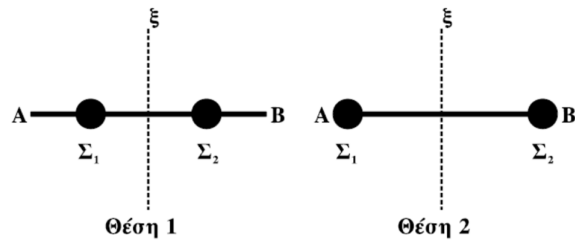
- α. μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα του κύβου.
β. μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα της σφαίρας.
γ. οι ταχύτητες είναι ίσες.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Μονάδες 5

22. [Εσπ. Λύκειο 2008] Η ομογενής ράβδος AB του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονα συμμετρίας (ξ) του σχήματος. Οι δύο σφαίρες Σ₁, Σ₂ μάζας m καθεμιά μπορούν να μετακινούνται κατά μήκος της ράβδου. Η ράβδος ξεκινά να περιστρέφεται
- πιο εύκολα στην θέση 1.
 - πιο εύκολα στην θέση 2.
 - το ίδιο εύκολα και στις δύο περιπτώσεις.

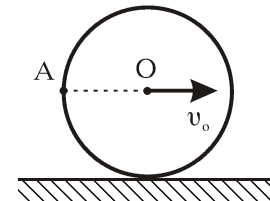


Μονάδες 3
Μονάδες 5

23. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2006] Σε ένα ακίνητο ρολόι που βρίσκεται σε κανονική λειτουργία, ο λόγος της στροφορμής του λεπτοδείκτη (L₁) προς την στροφορμή του ωροδείκτη (L₂), ως προς τον κοινό άξονα περιστροφής τους, είναι $\frac{L_1}{L_2} = \lambda$, όπου λ θετική σταθερά. Ο λόγος των κινητικών ενεργειών τους $\frac{K_1}{K_2}$ αντίστοιχα είναι
- 6λ.
 - 12λ.
 - 24λ.
- Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

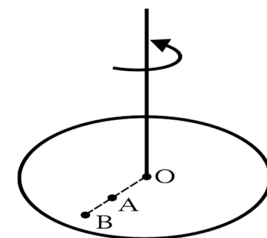
Μονάδες 3
Μονάδες 5

24. [Ημερ. Λύκειο 2009] Ο δίσκος του σχήματος κυλίνει χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου του O είναι u₀. Το σημείο A βρίσκεται στην περιφέρεια του δίσκου και το AO είναι οριζόντιο. Η ταχύτητα του σημείου A έχει μέτρο
- u_A = 2u₀
 - u_A = √2 u₀
 - u_A = u₀.



Μονάδες 3
Μονάδες 5

25. [Εσπ. Λύκειο 2009] Στη θέση A οριζώντιου δίσκου βρίσκεται ένα παιδί και το σύστημα παιδί – δίσκος περιστρέφεται χωρίς τριβές, με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του δίσκου O. Αν το παιδί μετακινηθεί από την θέση A στην θέση B του δίσκου (σχήμα), τότε η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου
- θα αυξηθεί.
 - θα παραμείνει η ίδια.
 - θα μειωθεί.
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

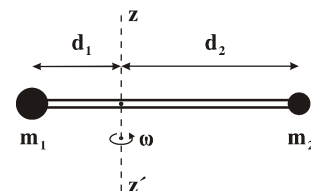


Μονάδες 3
Μονάδες 6

26. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2009] Χορεύτρια στρέφεται, χωρίς τριβές, έχοντας ανοιχτά τα δυο της χέρια με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Η χορεύτρια συμπύσσοντας τα χέρια της αυξάνει το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της, σε $\frac{5}{2}\omega$. Ο λόγος της αρχικής προς την τελική ροπή αδράνειας της χορεύτριας, ως προς τον άξονα περιστροφής της, είναι:
- 1
 - $\frac{5}{2}$
 - $\frac{2}{5}$.

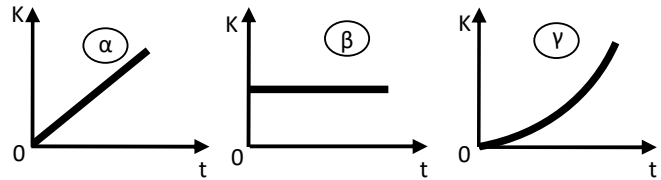
Μονάδες 3
Μονάδες 6

27. [Ομογενείς 2009] Η οριζόντια ράβδος του σχήματος είναι αβαρής, η σημειακή μάζα m₁ είναι τετραπλάσια από την σημειακή μάζα m₂, και το μήκος d₂ είναι διπλάσιο από το μήκος d₁. Το σύστημα περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z'z. Η ροπή αδράνειας της μάζας m₁ ως προς τον άξονα z'z είναι
- μεγαλύτερη από
 - μικρότερη από
 - ίση με
- την ροπή αδράνειας της μάζας m₂ ως προς τον ίδιο άξονα.
Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.
Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



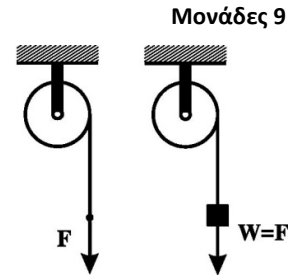
Μονάδες 3
Μονάδες 5

28. [Εσπερ. Λύκειο Επαναλ. 2010] Τροχός αρχικά ακίνητος, αρχίζει ($t_0 = 0$) και περιστρέφεται υπό την επίδραση σταθερής ροπής, γύρω από σταθερό άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Η κινητική ενέργεια K του τροχού ως συνάρτηση του χρόνου απεικονίζεται στο σχήμα:



Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. (μονάδες 2)
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (μονάδες 7)

29. [Ημερ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2011] Τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα. Όταν στο ελεύθερο άκρο του νήματος ασκούμε κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα κάτω μέτρου F , η τροχαλία αποκτά γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{\gamma\omega\nu,1}$ ενώ, όταν κρεμάμε στο ελεύθερο άκρο του νήματος σώμα βάρους $w = F$ η τροχαλία αποκτά γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu,2}$. Ισχύει:



Μονάδες 9

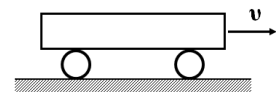
α. $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$ β. $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} > \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$ γ. $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} < \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση (μονάδες 2)

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας (μονάδες 7)

Μονάδες 9

30. [Ομογενείς 2012] Μία δοκός κινείται πάνω σε δύο όμοιους κυλίνδρους, όπως φαίνεται στο σχήμα, χωρίς να ολισθαίνει. Οι κύλινδροι κυλίνουν στο οριζόντιο δάπεδο χωρίς να ολισθαίνουν. Αν η δοκός μετατοπιστεί κατά 10 cm ο κάθε κύλινδρος θα μετατοπιστεί κατά



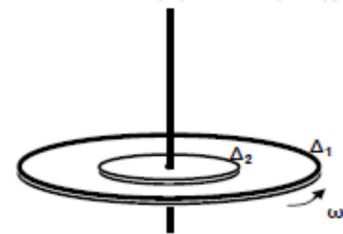
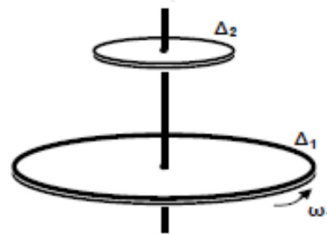
α. 10 cm β. 5 cm γ. 20 cm

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή τιμή (μονάδες 2).

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας (μονάδες 6).

Μονάδες 8

31. [Ημερ. & Εσπ. Λύκ. 2013] Ένας δίσκος Δ_1 με ροπή αδράνειας I_1 στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 και φορά περιστροφής όπως φαίνεται στο σχήμα, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Ένας δεύτερος



τερος δίσκος Δ_2 με ροπή αδράνειας $I_2 = \frac{1}{4} I_1$, που αρχικά είναι ακίνητος, τοποθετείται πάνω στον δίσκο Δ_1 , ενώ

αυτός περιστρέφεται, έτσι ώστε να έχουν κοινό άξονα περιστροφής, που διέρχεται από τα κέντρα των δύο δίσκων, όπως δείχνει το σχήμα. Μετά από λίγο οι δύο δίσκοι αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω . Η κοινή γωνιακή ταχύτητα ω των δύο δίσκων είναι:

i. $\omega = \frac{1}{5} \omega_1$ ii. $\omega = \frac{4}{5} \omega_1$ iii. $\omega = \frac{2}{5} \omega_1$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 2

Μονάδες 6

32. [Ομογενείς 2013] Στο σχήμα φαίνεται ένας ομογενής συμπαγής κυκλικός δίσκος (1) και ένας συμπαγής κυκλικός δακτύλιος (2), που έχουν την ίδια ακτίνα και την ίδια μάζα. Κάποια χρονική στιγμή ασκούνται στα σώματα αυτά δυνάμεις ίδιου μέτρου, εφαπτόμενες στην περιφέρεια, όπως φαίνεται στο σχήμα και τα σώματα αρχίζουν να κυλούν χωρίς να ολισθαίνουν στο οριζόντιο επίπεδο.



A. Για τις ροπές αδράνειας I_1 και I_2 των σωμάτων (1) και (2) αντίστοιχα, ισχύει:

α. $I_1 = I_2$ β. $I_1 < I_2$ γ. $I_1 > I_2$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδα 1)

(μονάδες 2)

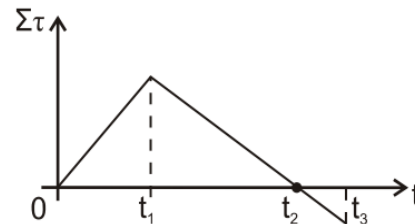
B. Για τις επιταχύνσεις των κέντρων μάζας $\alpha_{cm,1}$ και $\alpha_{cm,2}$ των σωμάτων (1) και (2) αντίστοιχα, ισχύει :

α. $\alpha_{cm,1} = \alpha_{cm,2}$ **β.** $\alpha_{cm,1} < \alpha_{cm,2}$ **γ.** $\alpha_{cm,1} > \alpha_{cm,2}$ (μονάδες 2)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (μονάδες 4)

Μονάδες 9

33. [Ημερ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2014] Οριζόντιος, αρχικά ακίνητος, δίσκος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται στον δίσκο μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε, η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει την μέγιστη τιμή την χρονική στιγμή



i. t_1 ii. t_2 iii. t_3 .

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση (μονάδες 2).

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας (μονάδες 6).

Μονάδες 8

34. [Ομογενείς 2014] Αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στην αθλήτρια δεν δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της και οι τριβές με τον πάγο είναι αμελητέες. Αν κάποια στιγμή συμπτύξει τα χέρια της, ενώ συνεχίζει να στρέφεται γύρω από τον ίδιο άξονα, η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της αθλήτριας:

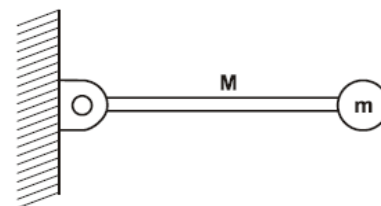
i. παραμένει σταθερή. ii. μειώνεται. iii. αυξάνεται.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση (μονάδες 2).

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας (μονάδες 6).

Μονάδες 8

35. [Ημερ. & Εσπ. Λύκειο 2015] Λεπτή ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Στο άλλο άκρο της ράβδου, είναι στερεωμένο σφαιρίδιο μάζας $m = M/2$ (Σχήμα 1). Την χρονική στιγμή που το σύστημα ράβδου-σφαιριδίου αφήνεται να κινηθεί από την οριζόντια θέση, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι:



Σχήμα 1

i. $\frac{\Delta L_p}{\Delta t} = \frac{1}{2}MgL$ ii. $\frac{\Delta L_p}{\Delta t} = MgL$ iii. $\frac{\Delta L_p}{\Delta t} = \frac{2}{5}MgL$

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της που περνά από το άκρο της,

είναι $I_p = \frac{1}{3}ML^2$.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 6

36. [Ομογενείς 2015] Ένα ομογενές σώμα (δακτύλιος ή σφαιρικός φλοιός ή συμπαγής σφαίρα) έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, που δίνεται από την σχέση $I_{cm} = \alpha mR^2$, όπου m η μάζα του σώματος, R η ακτίνα του και α ένας θετικός αριθμός μικρότερος ή ίσος της μονάδας ($0 < \alpha \leq 1$). Το σώμα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Αν η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω μεταφορικής κίνησης προς την ολική κινητική ενέργεια είναι $K_{μ}/K_{ολ} = 5/7$, τότε το α έχει την τιμή:

i. $\alpha = 1$. ii. $\alpha = 2/3$. iii. $\alpha = 2/5$.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση (μονάδες 2).

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας (μονάδες 6).

Μονάδες 8

37. [Ημερ. & Εσπ. Λύκειο 2016 (παλαιού τύπου)] Ένα μεταλλικό νόμισμα εκσφενδονίζεται κατακόρυφα προς τα άνω με αρχική ταχύτητα u_0 και αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Αν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα τότε, όταν το νόμισμα φτάσει στο ανώτατο ύψος

i. θα σταματήσει να περιστρέφεται.
ii. θα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μικρότερη της αρχικής.
iii. θα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ίση της αρχικής.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 5

38. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2016 (παλαιού τύπου)] Η βαρής λεπτή ράβδος του παρακάτω σχήματος είναι οριζόντια και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το μέσον της K . Σε απόσταση d από τον άξονα περιστροφής βρίσκονται δύο μικρές μεταλλικές χάντρες ίδιας μάζας m , οι οποίες

συνδέονται μεταξύ τους με νήμα. Το σύστημα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω . Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται, οπότε οι χάντρες κολάνε στα άκρα της ράβδου. Η νέα γωνιακή ταχύτητα με την οποία στρέφεται το σύστημα είναι:

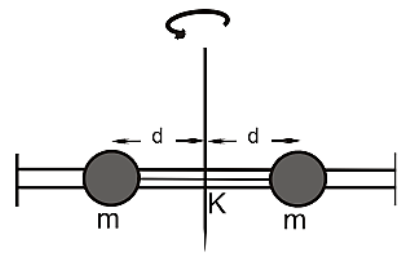
- i. μεγαλύτερη από την αρχική.
- ii. μικρότερη από την αρχική.
- iii. ίση με την αρχική.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6



39. [Ημ. Λύκεια Επαναλ. & Ομογενείς 2017] Ένας απομονωμένος ομογενής αστεράς σφαιρικού σχήματος ακτίνας R στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του με αρχική κινητική ενέργεια λόγω ιδιοπεριστροφής K_0 . Ο αστεράς συρρικνώνεται λόγω βαρύτητας διατηρώντας το σφαιρικό του σχήμα και την αρχική του μάζα. Σε κάποιο στάδιο της συρρικνώσεώς του η ακτίνα του υποδιπλασιάζεται. Η νέα κινητική του ενέργεια λόγω ιδιοπεριστροφής είναι ίση με K .

Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς συμπαγούς σφαίρας ακτίνας r ως προς άξονα που διέρχεται το κέντρο

μάζας της $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$. Ο λόγος $\frac{K}{K_0}$ είναι ίσος με

- i. $\frac{1}{2}$
- ii. 2
- iii. 4

α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. (μονάδες 2)

β. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. (μονάδες 6)

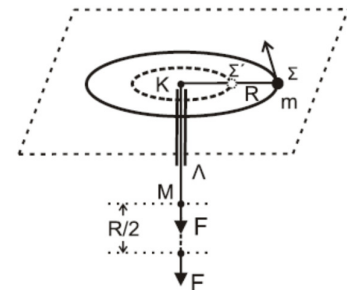
Μονάδες 8

40. [Ημερ. & Εσπ. Λύκειο 2018] Το σφαιρίδιο του σχήματος, μάζας m , διαγράφει οριζόντιο κύκλο ακτίνας $K\Sigma = R$ με γωνιακή ταχύτητα ω δεμένο στο άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος, το οποίο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα $ΚΛ$. Στο άκρο M του νήματος ασκείται κατάλληλη δύναμη F , ώστε αυτό να κινηθεί χωρίς τριβή διαμέσου του σωλήνα μέχρι η ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου μάζας m να γίνει $K\Sigma' = R/2$. Σε όλη την διάρκεια της μεταβολής της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, θεωρούμε ότι το σφαιρίδιο κινείται εκτελώντας κυκλική κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Το έργο της δύναμης F για την μετακίνηση του σφαιριδίου μάζας m θα είναι ίσο με:

- i. $\frac{1}{2}m\omega^2R^2$
- ii. $\frac{2}{3}m\omega^2R^2$
- iii. $\frac{3}{2}m\omega^2R^2$

α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας



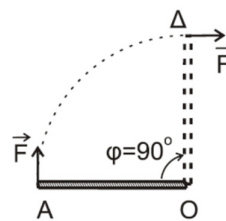
Μονάδες 2

Μονάδες 6

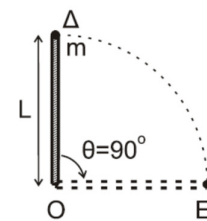
41. [Ημερ. Λύκειο 2019] Λεπτή ισοπαχής ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδο. Η αρχικά ακίνητη ράβδος στη θέση (OA) , υπό την επίδραση δύναμης \vec{F} σταθερού μέτρου, που ασκείται συνεχώς κάθετα στο άκρο της αρχίζει να κινείται (Σχήμα 4). Όταν η ράβδος έχει διαγράψει γωνία $\phi = 90^\circ$ και φτάσει στη θέση (OD) , η δύναμη παύει ακαριαία να ασκείται και ταυτόχρονα συγκρούεται πλαστικά με ένα σώμα μικρών διαστάσεων μάζας m που ενσωματώνεται ακαριαία στο άκρο της Δ (Σχήμα 5). Ο χρόνος Δt που θα χρειαστεί η ράβδος με το σώμα μάζας m για να διαγράψει τη γωνία $\theta = 90^\circ$ από την θέση (OD) έως τη θέση (OE) είναι ίσος με:

- i. $\frac{1}{6} s$
- ii. $\frac{1}{3} s$
- iii. $\frac{4}{3} s$

Δίνονται:



Σχήμα 4



Σχήμα 5

- η ροπή αδράνειας της λεπτής ομογενούς ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $I_{(ράβδου)} = \frac{1}{3} ML^2$
- $M = 3 \text{ kg}, m = 1 \text{ kg}, L = 1 \text{ m}, F = 9\pi \text{ N}$
- Όπου εμφανίζεται το π , να μη γίνει αριθμητική αντικατάσταση.

α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

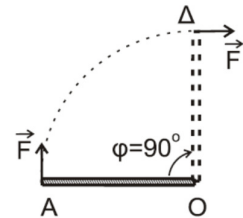
Μονάδες 2

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 7

Δόθηκε διευκρίνιση: Το m ακίνητο ακριβώς πριν την κρούση.

42. [Εσπ. Λύκειο 2019] Λεπτή ισοπαχής ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδο. Η αρχικά ακίνητη ράβδος στη θέση (OA) , υπό την επίδραση δύναμης \vec{F} σταθερού μέτρου, που ασκείται συνεχώς κάθετα στο άκρο της αρχίζει να κινείται (Σχήμα). Όταν η ράβδος έχει διαγράψει γωνία $\phi = 90^\circ$ και φτάσει στη θέση (OD) , έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω ίση με



- i. $3\pi \text{ rad/s}$ ii. $9\pi \text{ rad/s}$ iii. $3\pi^2 \text{ rad/s}$

Δίνονται:

- η ροπή αδράνειας της λεπτής ομογενούς ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $I_{(ράβδου)} = \frac{1}{3} ML^2$
- $M = 3 \text{ kg}, m = 1 \text{ kg}, L = 1 \text{ m}, F = 9\pi \text{ N}$
- Όπου εμφανίζεται το π , να μη γίνει αριθμητική αντικατάσταση.

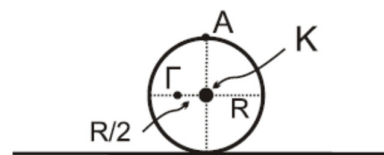
α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Μονάδες 2

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 6

43. [Ημερ. & Εσπ. Λύκειο 2020 (νέο)] Ο τροχός ακτίνας R κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια χρονική στιγμή το κέντρο μάζας του τροχού έχει ταχύτητα μέτρου u_{cm} . Έστω A το ανώτερο σημείο της περιφέρειας του τροχού και Γ ένα σημείο του τροχού που βρίσκεται στην οριζόντια διάμετρο και απέχει απόσταση $\Gamma K = R/2$ από το κέντρο K του τροχού, όπως φαίνεται στο



Σχήμα 2

σχήμα 2. Ο λόγος $\frac{u_\Gamma}{u_A}$ των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων Γ

και A είναι ίσος με

- i. $\frac{1}{4}$ ii. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ iii. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

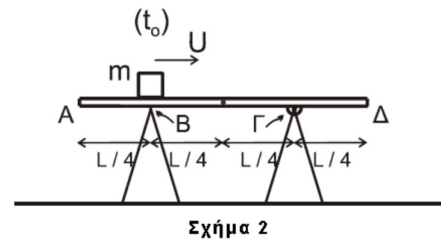
Μονάδες 2

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 6

44. [Ημερ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2020 (νέο)] Ομογενής λεία και άκαμπτη σανίδα, μικρού πάχους, μάζας M και μήκους L ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια δύο υποστηρίγματα. Η κορυφή του ενός υποστηρίγματος συνδέεται μέσω άρθρωσης σε σημείο Γ της ράβδου, το οποίο απέχει από το άκρο της Δ απόσταση $\Gamma\Delta = \frac{L}{4}$

Η ράβδος ακουμπά στην κορυφή Β του άλλου στηρίγματος, το οποίο απέχει από το άκρο της Α απόσταση $AB = \frac{L}{4}$ (Σχήμα 2).



Ένας μικρός κύβος μάζας $m = 2M$, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, διέρχεται από το σημείο Β με σταθερή ταχύτητα u , κινούμενος προς τα δεξιά χωρίς τριβές. Η σανίδα ανατρέπεται τη χρονική στιγμή t_1 , η οποία είναι ίση με

- i. $\frac{3L}{4u}$ ii. $\frac{9L}{16u}$ iii. $\frac{5L}{8u}$

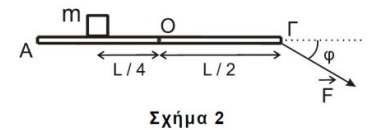
α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Μονάδες 2

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 6

45. [Ομογενείς 2020 (νέο)] Η λεπτή ράβδος ΑΓ (Σχήμα 2), μάζας M και μήκους L , μπορεί να στρέφεται γύρω από τον σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της O και είναι κάθετος σε αυτή. Σε απόσταση από το μέσο O της ράβδου έχει τοποθετηθεί ομογενές σώμα μάζας m αμελητέων διαστάσεων. Στο άκρο Γ της ράβδου ασκείται δύναμη F που σχηματίζει γωνία ϕ με την οριζόντια διεύθυνση και η ράβδος ΑΓ ισορροπεί στην οριζόντια θέση (Σχήμα 2). Το μέτρο της δύναμης F που ασκείται στο άκρο της ράβδου είναι ίσο με:



- i. $\frac{mg}{2}$ ii. $\frac{mg}{2\sin\phi}$ iii. $\frac{mg}{2\eta\mu\phi}$

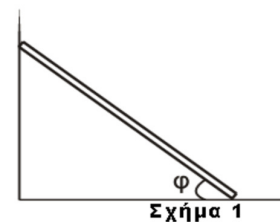
α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Μονάδες 2

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 6

46. [Ημερ. & Εσπ. Λύκειο 2021] Λεπτή ομογενής σκάλα βάρους w ισορροπεί, ακουμπώντας σε λείο κατακόρυφο τοίχο και τραχύ οριζόντιο δάπεδο, όπως στο σχήμα 1. Εάν μ ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ σκάλας και οριζοντίου δαπέδου, τότε η ελάχιστη τιμή της επαπτομένης της γωνίας ϕ , για την οποία η σκάλα ισορροπεί, είναι ίση με



- i. $\epsilon\phi\phi = \frac{1}{\mu}$ ii. $\epsilon\phi\phi = \frac{1}{2\mu}$ iii. $\epsilon\phi\phi = \frac{3}{2\mu}$

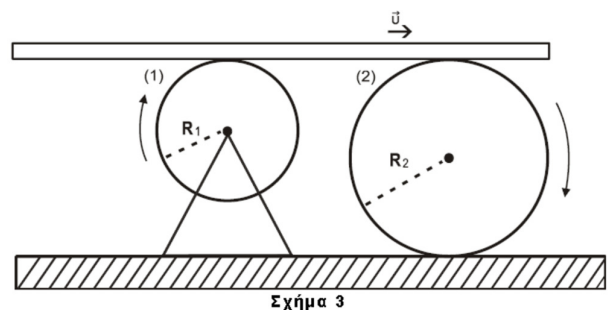
α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Μονάδες 2

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 6

47. [Ημερ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2021] Λεπτή σανίδα κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα \vec{u} , χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε δύο τροχούς (1) και (2) αντίστοιχα όπως στο σχήμα 3. Ο τροχός (1) ακτίνας R_1 περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα χωρίς τριβές και ο τροχός (2) ακτίνας $R_2 = \lambda \cdot R_1$ (όπου $\lambda > 1$) κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Όταν η σανίδα σε χρόνο t έχει μετακινηθεί κατά x οι δύο τροχοί έχουν κάνει N_1 και N_2 περιστροφές αντίστοιχα. Ο λόγος των περιστροφών $\frac{N_1}{N_2}$ των δύο κυλίνδρων είναι ίσος με:



περιστροφών $\frac{N_1}{N_2}$ των δύο κυλίνδρων είναι ίσος με:

- i. λ ii. 2λ iii. 4λ

Η σανίδα δεν χάνει την επαφή της κατά τη διάρκεια της κίνησης της πάνω στους δύο τροχούς.

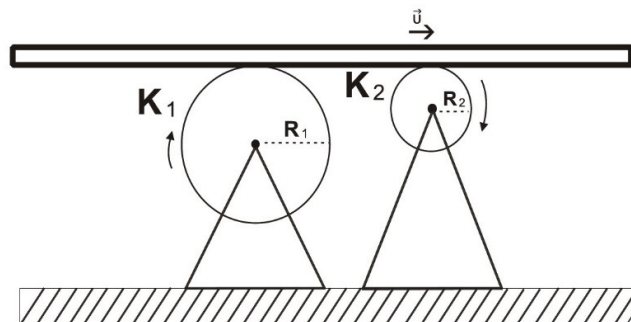
α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Μονάδες 2

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 6

48. [Ομογενείς 2021] Λεπτή σανίδα κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα \bar{u} , χωρίς να ολισθαίνει, πάνω στους κυλίνδρους K_1 και K_2 , οι οποίοι έχουν ακτίνες R_1 και R_2 αντίστοιχα. Για τις ακτίνες των κυλίνδρων ισχύει $R_1 = \lambda \cdot R_2$ με $\lambda > 1$. Οι κύλινδροι στρέφονται γύρω από σταθερούς οριζόντιους άξονες (Σχήμα 3). Η σανίδα δεν χάνει την επαφή της με τους κυλίνδρους κατά την διάρκεια της κίνησής της επάνω σε αυτούς. Όταν η σανίδα μετακινηθεί κατά Δx σε χρόνο Δt , οι κύλινδροι K_1 και K_2 έχουν εκτελέσει N_1 και N_2 περιστροφές αντίστοιχα. Ο λόγος των περιστροφών $\frac{N_2}{N_1}$ των δύο



Σχήμα 3

κυλίνδρων είναι ίσος με:

- i. $\frac{N_2}{N_1} = \lambda$
- ii. $\frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\lambda}$
- iii. $\frac{N_2}{N_1} = 2\lambda$

α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Μονάδες 2

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 7

Θέμα Γ

1. [Εσπ. Λύκειο 2002] Ομογενής δοκός AB μήκους $L = 3 \text{ m}$ και βάρους $w = 50 \text{ N}$ ισορροπεί οριζόντια, στηριζόμενη στο άκρο A και στο σημείο Γ, που απέχει από το άλλο άκρο B απόσταση $d = 0,5 \text{ m}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- A. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούν τα στηρίγματα στην δοκό στα σημεία A και Γ.

Μονάδες 12

Στο άκρο B της δοκού τοποθετείται σώμα βάρους w_1 και παρατηρούμε ότι η δύναμη που ασκείται στην δοκό από το στηρίγμα στο άκρο A ελαττώνεται στο μισό.

- B. Να υπολογίσετε το βάρος w_1 του σώματος.

Μονάδες 13

2. [Ομογενείς 2002] Οριζόντιος ομογενής και συμπαγής δίσκος, μάζας $M = 3 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Την χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στο δίσκο δύναμη F σταθερού μέτρου 3 N που εφάπτεται στην περιφέρειά του, οπότε ο δίσκος αρχίζει να περιστρέφεται. Κάποια χρονική στιγμή t_1 ο δίσκος έχει κινητική ενέργεια $K = 75 \text{ J}$. Να υπολογίσετε:

- α. την ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Μονάδες 5

- β. την γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.

Μονάδες 7

- γ. την γωνιακή του ταχύτητα την χρονική στιγμή t_1 .

Μονάδες 7

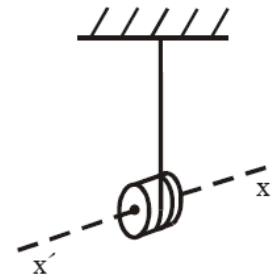
- δ. την ροπή αδράνειας του δίσκου, αν η περιστροφή του γινόταν γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το μέσο μιας ακτίνας του.

Μονάδες 6

Η ροπή αδράνειας του παραπάνω δίσκου, ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται

από το κέντρο του, δίνεται από την σχέση $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

3. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2005] Το γιο-γιο του σχήματος αποτελείται από ομογενή συμπαγή κύλινδρο που έχει μάζα $m = 0,12 \text{ kg}$ και ακτίνα $R = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Γύρω από τον κύλινδρο έχει τυλιχτεί νήμα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει. Το νήμα ξετυλιγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του. Το νήμα σε όλη την διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου παραμένει κατακόρυφο και τεντωμένο και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου. Την στιγμή που έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $l = 20R$, η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{cm} = 2 \text{ m/s}$.



- α. Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του. (Ο τύπος που μας δίνει την ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, δε θεωρείται γνωστός).

Μονάδες 6

- β. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου, καθώς αυτός κατέρχεται.

Μονάδες 7

- γ. Την χρονική στιγμή που η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{cm} = 2 \text{ m/s}$, το νήμα κόβεται. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του μετά την πάροδο $0,8 \text{ s}$ από την στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Μονάδες 6

- δ. Να κάνετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα του μέτρου της στροφορμής σε συνάρτηση με τον χρόνο από την χρονική στιγμή $t = 0$, μέχρι την χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σε χρόνο $0,8 \text{ s}$ από την στιγμή που κόπηκε το νήμα. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Μονάδες 6

4. [Ομογενείς 2006] Ομογενής δίσκος μάζας $m = 40 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 20 \text{ cm}$ στρέφεται με γωνιακή συχνότητα $\omega = 5 \text{ rad/s}$ γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν. Να υπολογίσετε:

- α. Την κινητική ενέργεια του δίσκου λόγω της περιστροφής του.

Μονάδες 6

- β. Το μέτρο της αρχικής στροφορμής του δίσκου.

Μονάδες 6

- γ. Την μέση ισχύ της ροπής (σε απόλυτη τιμή) που θα ακινητοποιήσει τον δίσκο σε χρόνο 5 s .

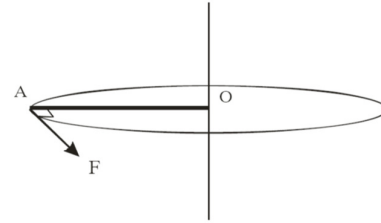
Μονάδες 6

δ. Το μέτρο της σταθερής ροπής που ακινητοποιεί τον δίσκο σε χρόνο 5 s.

Μονάδες 7

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

5. [Ημ. Λύκειο Επαναλ 2007] Η ράβδος OA του σχήματος με μήκος $L = 1$ m και μάζα $M = 6$ kg είναι οριζόντια και περιστρέφεται υπό την επίδραση οριζόντιας δύναμης F που έχει σταθερό μέτρο και είναι διαρκώς κάθετη στην ράβδο, στο άκρο της A. Η περιστροφή γίνεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το O. Αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες. Να υπολογιστούν:



α. Η τιμή της δύναμης F , αν γνωρίζουμε ότι το έργο που έχει προσφέρει η δύναμη στην διάρκεια της πρώτης περιστροφής είναι 30π J.

Μονάδες 6

β. Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

Μονάδες 7

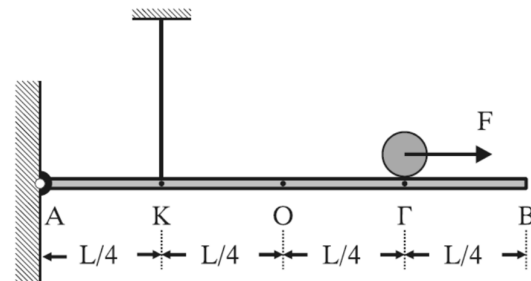
γ. Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στην ράβδο στο τέλος της πρώτης περιστροφής.

Μονάδες 12

Δίνονται: $\sqrt{30\pi} = 9,7$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της

και είναι κάθετος στην ράβδο $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.

6. [Ημ. Λύκειο 2008] Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους $L = 4$ m και μάζας $M = 2$ kg ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο A της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Σε σημείο K της ράβδου έχει προσδεθεί το ένα άκρο κατακόρυφου αβαρούς νήματος σταθερού μήκους, με το επάνω άκρο του συνδεδεμένο στην οροφή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο σημείο Γ ισορροπεί ομογενής σφαίρα μάζας $m = 2,5$ kg και ακτίνας $r = 0,2$ m. Δίνονται



$$AK = \frac{L}{4}, AG = \frac{3L}{4}.$$

α. Να υπολογισθεί το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στην ράβδο.

Μονάδες 6

Την χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται στο κέντρο μάζας της σφαίρας με κατάλληλο τρόπο, σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 7$ N, με φορά προς το άκρο B. Η σφαίρα κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει.

β. Να υπολογισθεί το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της σφαίρας κατά την κίνησή της.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας όταν φθάσει στο άκρο B.

Μονάδες 6

δ. Να υπολογισθεί το μέτρο της στροφορμής της σφαίρας όταν φθάσει στο άκρο B.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της σφαίρας μάζας m ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της

$$I = \frac{2}{5}mr^2 \text{ και } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Μονάδες 7

7. [Εσπ. Λύκειο 2010] Κυκλική στεφάνη ακτίνας $R = 0,2$ m και μάζας $m = 1$ kg κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας K είναι $v_{cm} = 10$ m/s. Η ροπή αδράνειας της στεφάνης ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος προς το επίπεδό της είναι $I_{cm} = mR^2$. Ο είναι το κατώτατο και A το ανώτατο σημείο της στεφάνης. Η ευθεία KB είναι παράλληλη στο δάπεδο. Να υπολογίσετε:

Γ1. τα μέτρα των ταχυτήτων στα σημεία O, A και B της στεφάνης.

Μονάδες 9

Γ2. τη γωνιακή ταχύτητα της στεφάνης.

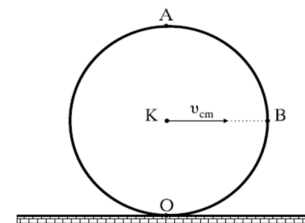
Μονάδες 4

Γ3. την ροπή αδράνειας της στεφάνης ως προς το σημείο O.

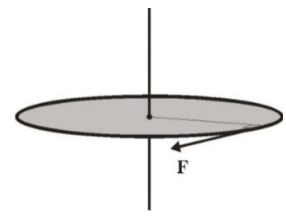
Μονάδες 5

Γ4. την κινητική ενέργεια της στεφάνης.

Μονάδες 7



8. [Εσπ. Λύκειο Επαναλ. 2011] Οριζόντιος ομογενής δίσκος με μάζα $M = 2 \text{ kg}$ και ακτίνα $R = 0,5 \text{ m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ο δίσκος αρχικά είναι ακίνητος. Κάποια στιγμή $t_0 = 0$, ασκείται σε σημείο της περιφέρειας του δίσκου δύναμη σταθερού μέτρου $F = 10 \text{ N}$, συνεχώς εφαπτόμενη σε αυτόν.



Γ1. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F από την στιγμή $t_0 = 0$ έως την στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει γίνει $\omega = 8 \text{ rad/s}$. **Μονάδες 6**

Γ2. Να υπολογίσετε την γωνία που έχει διαγράψει ο δίσκος μέχρι εκείνη την στιγμή. **Μονάδες 6**

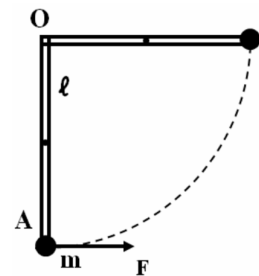
Γ3. Να υπολογίσετε την ισχύ της δύναμης F την ίδια στιγμή. **Μονάδες 6**

Την στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι $\omega = 8 \text{ rad/s}$, η δύναμη F καταργείται και ο δίσκος συνεχίζει να στρέφεται με την ταχύτητα αυτή. Από κάποιο ύψος αφήνεται να πέσει ένα κομμάτι λάσπης μάζας $m = 1 \text{ kg}$ αμελητέων διαστάσεων, που κολλάει στον δίσκο σε σημείο της περιφέρειάς του.

Γ4. Να υπολογίσετε την νέα γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το σύστημα δίσκος – λάσπη. **Μονάδες 7**

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

9. [Ημ. Λύκειο 2012] Ομογενής και ισοπαχής δοκός (ΟΑ), μάζας $M = 6 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 0,3 \text{ m}$, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα άκρο της Ο. Στο άλλο της άκρο Α υπάρχει στερεωμένη μικρή σφαίρα μάζας $m = \frac{M}{2}$.



Γ1. Βρείτε την ροπή αδράνειας του συστήματος δοκού-σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής του. **Μονάδες 6**

Ασκούμε στο άκρο Α δύναμη, σταθερού μέτρου $F = \frac{120}{\pi} \text{ N}$, που είναι συνεχώς κάθετη

στην δοκό, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Γ2. Βρείτε το έργο της δύναμης F κατά την περιστροφή του συστήματος μέχρι την οριζόντια θέση της. **Μονάδες 6**

Γ3. Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος δοκού-σφαίρας στην οριζόντια θέση. **Μονάδες 6**

Επαναφέρουμε το σύστημα δοκού-σφαίρας στην αρχική κατακόρυφη θέση του. Ασκούμε στο άκρο Α δύναμη, σταθερού μέτρου $F' = 30\sqrt{3} \text{ N}$, που είναι συνεχώς κάθετη στην δοκό.

Γ4. Βρείτε την γωνία που σχηματίζει η δοκός με την κατακόρυφο την στιγμή που η κινητική της ενέργεια γίνεται μέγιστη. **Μονάδες 7**

Δίνονται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, ροπή αδράνειας ομογενούς δοκού μάζας M και μήκους ℓ , ως προς άξονα που διέρχεται

από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}M\ell^2$, $\eta\mu 60^\circ = \text{συν}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu 30^\circ = \text{συν}60^\circ = \frac{1}{2}$.

10. [Εσπ. Λύκειο 2012] Ομογενής και ισοπαχής δοκός (ΟΑ), μάζας $M = 6 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 0,3 \text{ m}$, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα άκρο της Ο. Στο άλλο της άκρο Α υπάρχει στερεωμένη μικρή σφαίρα μάζας $m = \frac{M}{2}$.

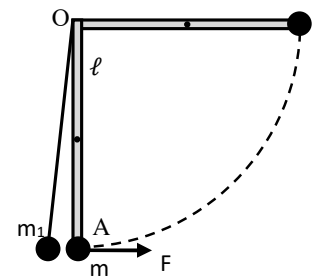
Γ1. Βρείτε την ροπή αδράνειας του συστήματος δοκού-σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής του. **Μονάδες 6**

Ασκούμε στο άκρο Α δύναμη, σταθερού μέτρου $F = \frac{120}{\pi} \text{ N}$, που είναι συνεχώς

κάθετη στην δοκό, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Γ2. Βρείτε το έργο της δύναμης F κατά την περιστροφή του συστήματος μέχρι την οριζόντια θέση II. **Μονάδες 6**

Γ3. Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος δοκού-σφαίρας στην οριζόντια θέση. **Μονάδες 6**



Μονάδες 6

Η δοκός με την μικρή σφαίρα αφήνεται ελεύθερη από την οριζόντια θέση της II, χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα. Φθάνοντας στην κατακόρυφη θέση I, συγκρούεται με ακίνητο σφαιρίδιο, μάζας $m_1 = \frac{M}{2}$, που είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους ℓ και το άλλο άκρο στερεωμένο στο O. Το σύστημα δοκού – σφαίρας μετά την κρούση παραμένει ακίνητο.

Γ4. Βρείτε την ταχύτητα της σφαίρας μάζας m_1 αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 7

Δίνονται: $g = 10 \frac{m}{s^2}$, ροπή αδράνειας ομογενούς δοκού μάζας M και μήκους ℓ , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν $I_{cm} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

11. [Ημ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ 2012] Συμπαγής ομογενής δίσκος, μάζας $M = 2\sqrt{2}$ kg και ακτίνας $R = 0,1$ m, είναι προσδεμένος σε ιδανικό ελατήριο, σταθεράς $k = 100$ N/m στο σημείο A και ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, που σχηματίζει γωνία $\phi = 45^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Το ελατήριο είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και ο άξονας του ελατηρίου απέχει απόσταση $d = \frac{R}{2}$ από το κέντρο (O)

του δίσκου. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ακλόνητα στο σημείο Γ.

Γ1. Να υπολογίσετε την επιμήκυνση του ελατηρίου.

Μονάδες 6

Γ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της στατικής τριβής και να προσδιορίσετε την κατεύθυνσή της.

Μονάδες 6

Κάποια στιγμή το ελατήριο κόβεται στο σημείο A και ο δίσκος αμέσως κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

Γ3. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου.

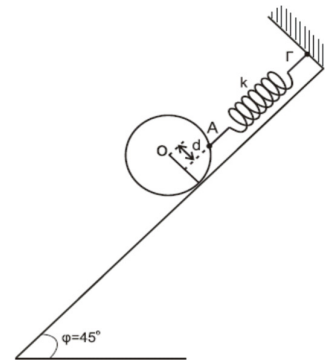
Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε την στροφορμή του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του, όταν το κέντρο μάζας του έχει μετακινηθεί κατά διάστημα $s = 0,3\sqrt{2}$ m στην διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου.

Μονάδες 7

Δίνονται: η ροπή αδράνειας ομογενούς συμπαγούς δίσκου ως προς άξονα

που διέρχεται κάθετα από το κέντρο του $I = \frac{1}{2} MR^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{m}{s^2}$, $\eta_{\mu 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



12. [Ομογενείς 2012] Μια ομογενής ράβδος AB που έχει μήκος $\ell = 3$ m και μάζα $M = 6$ kg έχει στο ένα άκρο της B μόνιμα στερεωμένο ένα σώμα μικρών διαστάσεων μάζας $m = 1$ kg. Η ράβδος στηρίζεται με το άλλο άκρο της A σε κατακόρυφο τοίχο μέσω άρθρωσης. Η ράβδος συγκρατείται σε θέση ισορροπίας, σχηματίζοντας γωνία ϕ με την κατακόρυφο, με νήμα το οποίο είναι συνδεδεμένο στον τοίχο και στο μέσο (K) της ράβδου και είναι κάθετο σε αυτήν, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

Γ1. Την ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου-σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετος στην ράβδο.

Μονάδες 5

Γ2. Το μέτρο της τάσης του νήματος.

Μονάδες 7

Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και η ράβδος μαζί με το σώμα αρχίζει να περιστρέφεται στο επίπεδο του σχήματος, χωρίς τριβές. Να υπολογίσετε:

Γ3. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου μόλις κοπεί το νήμα.

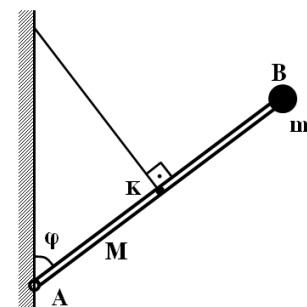
Μονάδες 6

Γ4. Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B της ράβδου όταν αυτή γίνει οριζόντια για πρώτη φορά.

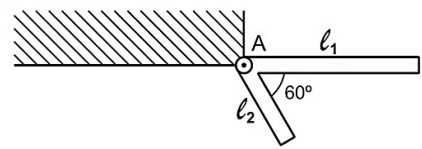
Μονάδες 7

Δίνονται: $\sin\phi = 0,8$, $\eta_{\mu\phi} = 0,6$, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής $I_A = \frac{1}{3} M \ell^2$

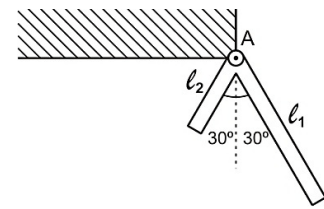
και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m/s².



13. [Ημ. & Εσπ. Λύκειο Επαναλ 2015] Δύο ράβδοι είναι συνδεδεμένες στο άκρο τους Α και σχηματίζουν σταθερή γωνία 60° μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Οι ράβδοι είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αλλά κάθε μία είναι ομογενής. Το σύστημα των δύο ράβδων μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άρθρωση, που είναι στερεωμένη σε τοίχο, στο άκρο Α, χωρίς τριβές. Το σύστημα αφήνεται να περιστραφεί υπό την επίδραση της βαρύτητας από την θέση του Σχήματος 7, όπου η ράβδος ℓ_1 είναι οριζόντια, με αρχική ταχύτητα μηδέν. Δίνεται ότι τα μήκη των δύο ράβδων είναι $\ell_1 = 4 \text{ m}$ και $\ell_2 = 2 \text{ m}$, ενώ η μάζα της ράβδου ℓ_2 είναι $m_2 = 10 \text{ kg}$.



Σχήμα 7

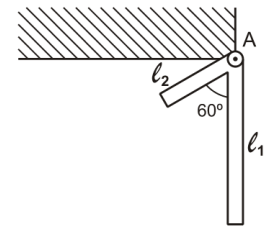


Σχήμα 8

- Γ1. Να υπολογίσετε την μάζα m_1 της ράβδου μήκους ℓ_1 , εάν το σύστημα αποκτά την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα την χρονική στιγμή που οι δύο ράβδοι σχηματίζουν ίσες γωνίες με την κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.

Μονάδες 5

- Γ2. Να υπολογίσετε την μάζα m_1 της ράβδου μήκους ℓ_1 , εάν το σύστημα σταματά στιγμιαία, όταν η ράβδος μήκους ℓ_1 φτάνει στην κατακόρυφη θέση που φαίνεται στο Σχήμα 9.



Σχήμα 9

- Γ3. Να υπολογίσετε την γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος των δύο ράβδων του ερωτήματος Γ2 στην θέση που απεικονίζεται στο Σχήμα 9.

Μονάδες 7

- Γ4. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου μήκους ℓ_2 του ερωτήματος Γ2 στην θέση που απεικονίζεται στο Σχήμα 9.

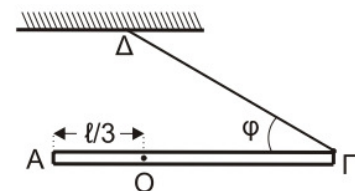
Μονάδες 7

Μονάδες 6

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, η ροπή αδρανείας ράβδου μήκους

ℓ και μάζας m που περιστρέφεται γύρω από το άκρο της Α, $I_A = \frac{1}{3} M \ell^2$ και ότι $\sqrt{3} = 1,7$ (προσεγγιστικά).

14. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκειο 2016 (παλαιού τύπου)] Λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $\ell = 1,2 \text{ m}$ και μάζας $M = 1 \text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα κάθετο στην ράβδο, ο οποίος διέρχεται από το σημείο Ο σε απόσταση $\ell/3$ από το άκρο Α της ράβδου. Το άκρο Γ της ράβδου συνδέεται με αβαρές νήμα που σχηματίζει γωνία $\phi = 30^\circ$ με την ράβδο, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα συνδεδεμένο σε σταθερό σημείο Δ, όπως στο σχήμα. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται.



- Γ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στην ράβδο και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονα περιστροφής, πριν κοπεί το νήμα.

Μονάδες 6

- Γ2. Να υπολογίσετε

α. την ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.

β. την γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου την χρονική στιγμή κατά την οποία κόβεται το νήμα.

Μονάδες 8

- Γ3. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του άκρου Γ της ράβδου την χρονική στιγμή κατά την οποία η ράβδος διέρχεται για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση.

Μονάδες 6

- Γ4. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου την χρονική στιγμή που σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφο, μετά την διέλευσή της για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση.

Μονάδες 5

Δίνονται: η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} M \ell^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας

$g = 10 \text{ m/s}^2$, $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. [Ομογενείς 2016] Η ομογενής τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M = 4 \text{ kg}$ και ακτίνα $R = 0,1 \text{ m}$ και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα και είναι δεμένα στα άκρα αβαρούς σχοινιού που διέρχεται από το αυλάκι της τροχαλίας. Αρχικά, τα σώματα Σ_1 και Σ_2 διατη-

ρούνται ακίνητα και τα κέντρα μάζας τους βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ τα σώματα αφήνονται ελεύθερα να κινηθούν.

Γ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.

Μονάδες 8

Γ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 την χρονική στιγμή $t_1 = 3$ s.

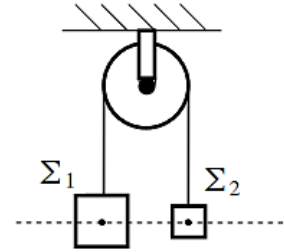
Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε τον αριθμό περιστροφών της τροχαλίας μέχρι την χρονική στιγμή $t_1 = 3$ s.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος των σωμάτων Σ_1 , Σ_2 και τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας.

Μονάδες 6



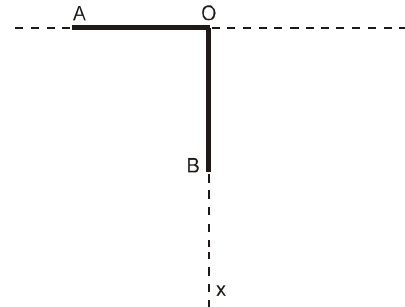
Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση

της βαρύτητας $g = 10$ m/s².

Να θεωρήσετε ότι: Μεταξύ σχοινιού και τροχαλίας η τριβή είναι μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση, το μήκος του σχοινιού παραμένει σταθερό και τα σώματα Σ_1 και Σ_2 δεν φθάνουν στο έδαφος ούτε συγκρούονται με την τροχαλία.

Θέμα Δ

1. [Ημερ. Λύκειο 2002] Δύο ίδιες, λεπτές, ισοπαχείς και ομογενείς ράβδοι OA και OB, που έχουν μάζα $M = 4 \text{ kg}$ και μήκος $L = 1,5 \text{ m}$ η καθεμία, συγκολλούνται στο ένα άκρο τους O, ώστε να σχηματίζουν ορθή γωνία. Το σύστημα των δύο ράβδων μπορεί να περιστρέφεται περί οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο AOB, που διέρχεται από την κορυφή O της ορθής γωνίας. Το σύστημα αρχικά συγκρατείται στην θέση όπου η ράβδος OA είναι οριζόντια (όπως στο σχήμα). Η ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.



A. Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το O.

Μονάδες 6

B. Από την αρχική του θέση το σύστημα των δύο ράβδων αφήνεται ελεύθερο να περιστραφεί περί τον άξονα περιστροφής στο σημείο O, χωρίς τριβές. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος των δύο ράβδων την στιγμή της εκκίνησης.

Μονάδες 6

Γ. Την χρονική στιγμή κατά την οποία οι ράβδοι σχηματίζουν ίσες γωνίες με την κατακόρυφο O χ , να υπολογίσετε:

α. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος των δύο ράβδων.

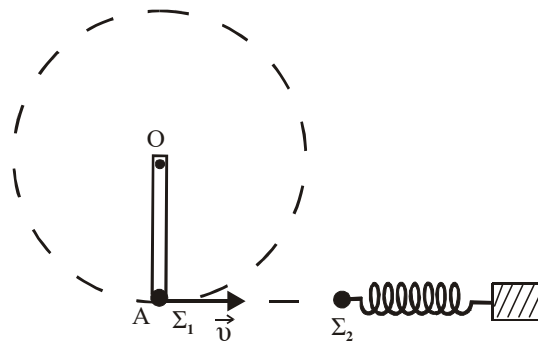
Μονάδες 7

β. Το μέτρο της στροφορμής της κάθε ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο O.

Μονάδες 6

Δίνονται: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\eta\mu 45^\circ = \text{συν} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7$.

2. [Εσπερ. Λύκειο 2003] Ομογενής στερεά ράβδος OA, μήκους $L = 2 \text{ m}$ και μάζας $M = 0,3 \text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα (χωρίς τριβές) στο οριζόντιο επίπεδο, περί κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σταθερό σημείο O. Στο άκρο A της ράβδου στερεώνεται σφαιρίδιο Σ_1 μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$, και το σύστημα ράβδου και σφαιριδίου Σ_1 περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1 \text{ rad/s}$. Στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται δεύτερο σφαιρίδιο Σ_2 , ίσης μάζας με το Σ_1 , προσδεμένο στο άκρο αβαρούς ελατηρίου, σταθεράς $k = 20 \text{ N/m}$. Ο άξονας του ελατηρίου είναι οριζόντιος και εφάπτεται της κυκλικής τροχιάς του σφαιριδίου Σ_1 (όπως στο σχήμα). Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ακλόνητα. Οι διαστάσεις των σφαιριδίων είναι αμελητέες. Όταν η ταχύτητα \vec{v} του σφαιριδίου Σ_1 έχει την διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, το σφαιρίδιο Σ_1 αποκολλάται από την ράβδο και κινούμενο ευθύγραμμα συγκρούεται με το σφαιρίδιο Σ_2 με το οποίο ενσωματώνεται. Να βρείτε:



α. Την στροφορμή του συστήματος ράβδου-σφαιριδίου Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο O.

Μονάδες 8

β. Το μέτρο v της ταχύτητας του σφαιριδίου την στιγμή που αποκολλάται από την ράβδο.

Μονάδες 4

γ. Την περίοδο T της ταλάντωσης του συστήματος ελατηρίου – συσσωματώματος Σ_1 και Σ_2 .

Μονάδες 5

δ. Το πλάτος της ταλάντωσης αυτής.

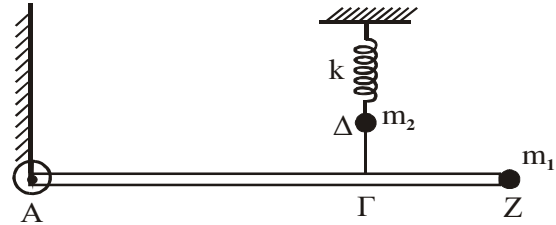
Μονάδες 8

(Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο O

$I_0 = \frac{1}{3}ML^2$ και $\pi = 3,14$).

3. [Εν. Λύκειο 2003] Ομογενής άκαμπτη ράβδος AZ έχει μήκος $L = 4 \text{ m}$, μάζα $M = 3 \text{ kg}$ και ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο άκρο της A υπάρχει ακλόνητη άρθρωση γύρω από την οποία η ρά-

βδος μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, ενώ στο άλλο άκρο της Z υπάρχει στερεωμένο σφαιρίδιο μάζας $m_1 = 0,6 \text{ kg}$ και αμελητέων διαστάσεων. Ένα αβαρές τεντωμένο νήμα ΔΓ συνδέει το σημείο Γ της ράβδου με σφαιρίδιο μάζας $m_2 = 1 \text{ kg}$, το οποίο είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητο. Η απόσταση ΑΓ είναι ίση με $2,8 \text{ m}$. Όλη η διάταξη βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, στο οποίο γίνονται και όλες οι κινήσεις.



A. Να υπολογίσετε:

A.1 την ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου – σφαιριδίου m_1 ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετος στο επίπεδο της διάταξης.

Μονάδες 6

A.2 το μέτρο της τάσης του νήματος ΔΓ.

Μονάδες 6

B. Αν κόψουμε το νήμα ΔΓ, το σφαιρίδιο m_2 εκτελεί αμείωτη αρμονική ταλάντωση, ενώ η ράβδος μαζί με το σώμα m_1 , υπό την επίδραση της βαρύτητας, περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από το σημείο A.

Να υπολογίσετε:

B.1 τον χρόνο που χρειάζεται το σφαιρίδιο m_2 από την στιγμή που κόβεται το νήμα μέχρι την στιγμή που θα φθάσει στην ψηλότερη θέση του για πρώτη φορά.

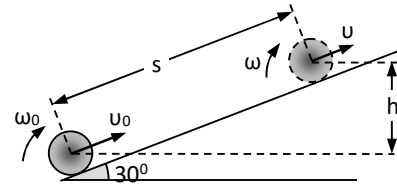
Μονάδες 6

B.2 το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Z, την στιγμή που η ράβδος περνάει από την κατακόρυφη θέση.

Μονάδες 7

Δίνονται: $g = 10 \text{ m/s}^2$, ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$, $\pi = 3,14$.

4. [Ημερ. Λύκειο 2004] Συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας $m = 10 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,1 \text{ m}$ κυλιέται ευθύγραμμα χωρίς ολίσθηση ανερχόμενη κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας ϕ με ημφ $= 0,56$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το κέντρο μάζας της σφαίρας έχει ταχύτητα με μέτρο $u_0 = 8 \text{ m/s}$. Να υπολογίσετε για την σφαίρα:



α. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της την χρονική στιγμή $t = 0$.

Μονάδες 6

β. το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της.

Μονάδες 6

γ. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής κατά την διάρκεια της κίνησής της.

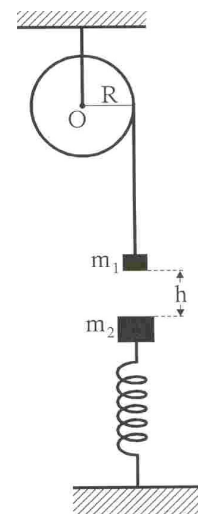
Μονάδες 6

δ. το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της καθώς ανεβαίνει, την στιγμή που έχει διαγράψει $\frac{30}{\pi}$ περιστροφές.

Μονάδες 7

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της σφαίρας περί άξονα διερχόμενο από το κέντρο της: $I = \frac{2}{5} mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

5. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2004] Η ομογενής τροχαλία του σχήματος ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ και μάζας $M = 3 \text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος το οποίο είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο. Κάτω από το σώμα Σ_1 και σε απόσταση h βρίσκεται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3 \text{ kg}$ το οποίο ισορροπεί στερεωμένο στην μία άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200 \text{ N/m}$ η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη στο έδαφος. Αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα τροχαλίας – σώματος Σ_1 να κινηθεί. Μετά από χρόνο $t = 1 \text{ s}$ το σώμα Σ_1 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα Σ_2 , ενώ το νήμα κόβεται. Το συσσωμάτωμα εκτελεί αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση στην κατακόρυφη διεύθυνση. Να υπολογίσετε:



α. το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_1 μέχρι την κρούση.

Μονάδες 6

β. την κινητική ενέργεια της τροχαλίας μετά την κρούση

Μονάδες 6

γ. το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα.

Μονάδες 6

δ. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος, την στιγμή που απέχει από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης απόσταση $x = 0,1 \text{ m}$.

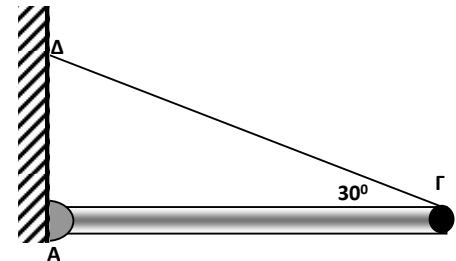
Μονάδες 7

Να θεωρήσετε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2} MR^2$ και η επιτάχυνση

της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

6. [Ομογενείς 2004] Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ με μήκος 1 m και βάρος 30 N ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της Γ συνδέεται με τον τοίχο με αβαρές νήμα ΔΓ που σχηματίζει γωνία 30° με την ράβδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στην ράβδο από το νήμα και την άρθρωση.

Μονάδες 8

Β. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα στο άκρο Γ και η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από την άρθρωση σε κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογίσετε

1. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου μόλις κοπεί το νήμα.

Μονάδες 6

2. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, την στιγμή που αυτή σχηματίζει γωνία 60° με την αρχική της θέση.

Μονάδες 6

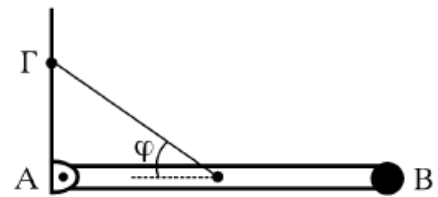
3. την κινητική ενέργεια της ράβδου, την στιγμή που διέρχεται από την κατακόρυφη θέση.

Μονάδες 5

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α και

είναι κάθετος σε αυτήν είναι $I_A = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $\eta\mu 30^\circ = \text{συν } 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{συν } 30^\circ = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. [Εσπερ. Λύκειο 2005] Μια ομογενής ράβδος ΑΒ με μήκος $l = 1 \text{ m}$ και μάζα $M = 6 \text{ kg}$, έχει στο άκρο της Β μόνιμα στερεωμένο ένα σώμα μικρών διαστάσεων με μάζα $m = 2 \text{ kg}$. Η ράβδος στηρίζεται με το άκρο της Α μέσω άρθρωσης και αρχικά διατηρείται οριζόντια με την βοήθεια νήματος, το ένα άκρο του οποίου είναι δεμένο στο μέσον της ράβδου και το άλλο στον κατακόρυφο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διεύθυνση του νήματος σχηματίζει γωνία $\phi = 30^\circ$ με την διεύθυνση της ράβδου στην οριζόντια θέση ισορροπίας.



Α. Να υπολογίσετε:

Α.1. Το μέτρο της τάσης του νήματος.

Μονάδες 6

Α.2. Την ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου – σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το Α και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος.

Μονάδες 5

Β. Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και η ράβδος μαζί με το σώμα που είναι στερεωμένο στο άκρο της, αρχίζει να περιστρέφεται στο επίπεδο του σχήματος. Θεωρώντας τις τριβές αμελητέες να υπολογίσετε το μέτρο:

Β.1. της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος ράβδου – σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής, μόλις κόβεται το νήμα.

Μονάδες 7

Β.2. της ταχύτητας του σώματος στο άκρο της ράβδου, όταν αυτή φτάνει στην κατακόρυφη θέση.

Μονάδες 7

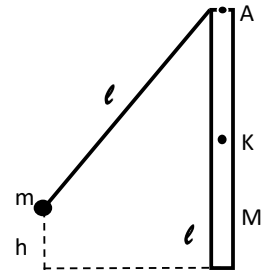
Δίνονται: Για την ράβδο η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι

παράλληλος στον άξονα περιστροφής της: $I_{cm} = \frac{1}{12} Ml^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

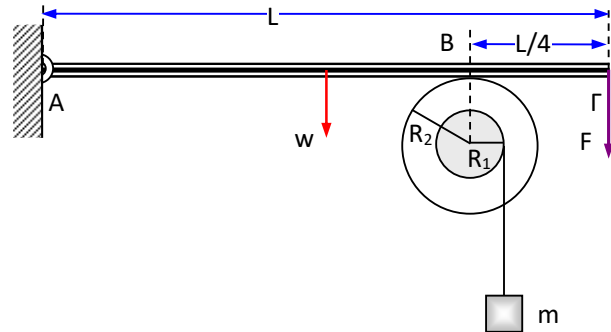
8. [Εσπ. Λύκειο 2006] Ομογενής ράβδος μήκους $\ell = 2 \text{ m}$ και μάζας $M = 3 \text{ kg}$, είναι αναρτημένη από οριζόντιο άξονα Α, γύρω από τον οποίο μπορεί να περιστραφεί σε κατακόρυφο επίπεδο. Στον ίδιο άξονα Α είναι δεμένο αβαρές νήμα με το ίδιο μήκος ℓ , στο άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σφαιρίδιο μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$. Αρχικά το νήμα είναι τεντωμένο στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και το σφαιρίδιο βρίσκεται σε ύψος $h = 0,8 \text{ m}$

πάνω από το κατώτερο σημείο της ράβδου. Στην συνέχεια το σφαιρίδιο αφήνεται ελεύθερο και προσκρούει στο άκρο της ράβδου. Μετά την κρούση το σφαιρίδιο ακινητοποιείται. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες. Να βρείτε:

- A. Την ταχύτητα του σφαιριδίου λίγο πριν την κρούση. **Μονάδες 3**
 - B. Την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. **Μονάδες 6**
 - Γ. Την γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας K της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. **Μονάδες 4**
 - Δ. Το ποσό της μηχανικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική κατά την κρούση. **Μονάδες 6**
 - E. Την μέγιστη ανύψωση του κέντρου μάζας της ράβδου. **Μονάδες 6**
- Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = (1/12) M\ell^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

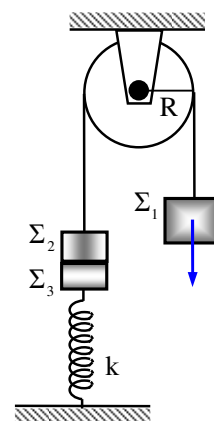


9. [Ημερ. Λύκειο 2006] Άκαμπτη ομογενής ράβδος ΑΓ με μήκος ℓ και μάζα $M = 3 \text{ kg}$ έχει το άκρο της Α αρθρωμένο και ισορροπεί οριζόντια. Στο άλλο άκρο Γ ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη F μέτρου 9 N , με φορά προς τα κάτω. Η ράβδος ΑΓ εφάπτεται στο σημείο Β με στερεό που αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες $R_1 = 0,1 \text{ m}$ και $R_2 = 0,2 \text{ m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απόσταση του σημείου επαφής Β από το άκρο Γ της ράβδου είναι $\ell/4$. Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, σαν ένα σώμα γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο του. Ο άξονας περιστροφής συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας των δύο κυλίνδρων. Η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I = 0,09 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Γύρω από τον κύλινδρο ακτίνας R_1 είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα στο άκρο του οποίου κρέμεται σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$.



- α. Να υπολογίσετε την κατακόρυφη δύναμη που δέχεται η ράβδος στο σημείο Β από το στερεό. **Μονάδες 6**
 - β. Αν το σώμα μάζας m ισορροπεί, να βρείτε το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής μεταξύ της ράβδου και του στερεού. **Μονάδες 6**
 - γ. Στο σημείο επαφής Β μεταξύ ράβδου και στερεού ρίχνουμε ελάχιστη ποσότητα λιπαντικής ουσίας έτσι, ώστε να μηδενιστεί η τριβή χωρίς να επιφέρει μεταβολή στην ροπή αδράνειας του στερεού. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m , όταν θα έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους $0,5 \text{ m}$. Να θεωρήσετε ότι το νήμα ξετυλιγεται χωρίς να ολισθαίνει στον εσωτερικό κύλινδρο. **Μονάδες 6**
 - δ. Να υπολογίσετε τον ρυθμό παραγωγής έργου στο στερεό την χρονική στιγμή που έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους $0,5 \text{ m}$. **Μονάδες 7**
- Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

10. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2006] Τροχαλία μάζας $M = 6 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,25 \text{ m}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Γύρω από την τροχαλία υπάρχει αβαρές και μη εκτατό νήμα. Στα άκρα του νήματος υπάρχουν σε κατακόρυφη θέση τα σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 4 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα. Το σώμα Σ_2 είναι κολλημένο με σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 1 \text{ kg}$, το οποίο συγκρατείται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K = 100 \text{ N/m}$. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια χρονική στιγμή, την οποία θεωρούμε ως χρονική στιγμή μηδέν ($t_0 = 0$), τα σώματα Σ_2 και Σ_3 αποκολλώνται και το Σ_3 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κατά την διεύθυνση της κατακόρυφου.

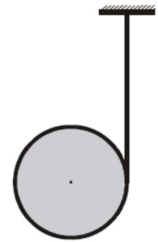


- α. Να υπολογιστεί το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_3 . **Μονάδες 6**
- β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_3 σε συνάρτηση με τον χρόνο, θεωρώντας ως θετική φορά, την φορά προς τα επάνω. **Μονάδες 6**
- γ. Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας μετά την αποκόλληση των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 . **Μονάδες 6**
- δ. Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας την χρονική στιγμή $t = 0,1 \text{ s}$

Μονάδες 7

Δίνονται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I = \frac{1}{2} MR^2$, η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο νήμα είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

11. [Εσπ. Λύκειο 2007] Στο γιο-γιο του σχήματος που έχει μάζα $M = 6 \text{ kg}$ και ακτίνα $R = 0,1 \text{ m}$, έχει τυλιχτεί πολλές φορές γύρω του λεπτό αβαρές νήμα. Με σταθερό το ένα άκρο του νήματος αφήνουμε το γιο-γιο να κατεβαίνει. Όταν αυτό έχει κατέβει κατά $h = \frac{5}{3} \text{ m}$ αποκτά μεταφο-



ρική ταχύτητα $v_{cm} = 5 \text{ m/s}$. Να βρείτε:

- A. Την μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος.
- B. Την γωνιακή επιτάχυνση του σώματος και την τάση του νήματος.
- Γ. Τον λόγο της στροφικής κινητικής ενέργειας προς την μεταφορική κινητική ενέργεια του σώματος, χωρίς να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο της ροπής αδράνειας του γιο-γιο.
- Δ. Την σχέση που περιγράφει πώς μεταβάλλεται η στροφική κινητική ενέργεια του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Δίνονται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Μονάδες 6

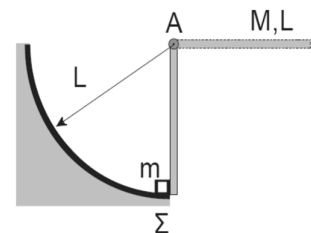
Μονάδες 6

Μονάδες 7

Μονάδες 6

12. [Ημερ. Λύκειο 2007] Ομογενής ράβδος μήκους $L = 0,3 \text{ m}$ και μάζας $M = 1,2 \text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A. Αρχικά την κρατάμε σε οριζόντια θέση και στην συνέχεια την αφήνουμε ελεύθερη. Θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

- α. Να βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής την στιγμή που αφήνεται ελεύθερη.
- β. Να βρείτε την στροφορμή της ράβδου όταν φθάσει σε κατακόρυφη θέση.



Μονάδες 5

Μονάδες 5

Την στιγμή που η ράβδος φθάνει στην κατακόρυφη θέση το κάτω άκρο της ράβδου συγκρούεται ακαριαία με ακίνητο σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων που έχει μάζα $m = 0,4 \text{ kg}$. Μετά την κρούση το σώμα κινείται κατά μήκος κυκλικού τόξου ακτίνας L , ενώ η ράβδος συνεχίζει να κινείται με την ίδια φορά. Δίνεται ότι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση είναι $\frac{\omega}{5}$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητά της αμέσως πριν την κρούση.

γ. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση.

δ. Να βρείτε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά την κρούση.

Μονάδες 7

Μονάδες 8

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα A: $I = \frac{1}{3} ML^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

13. [Ομογενείς 2007] Ένας ομογενής και συμπαγής κύλινδρος μάζας $M = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ αφήνεται να κυλήσει κατά μήκος ενός πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης ϕ , με $\eta\mu\phi = 0,6$, όπως φαίνεται στο σχήμα: Ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου καθώς αυτός κυλιέται.

Μονάδες 7

β. το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής που ασκείται στον κύλινδρο από το πλάγιο επίπεδο.

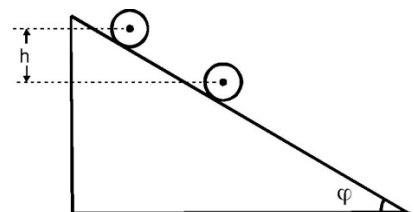
Μονάδες 6

γ. το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου κατά τον άξονά του, όταν η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου από το σημείο που αυτός αφέθηκε ελεύθερος είναι $h_1 = 4,8 \text{ m}$.

Μονάδες 6

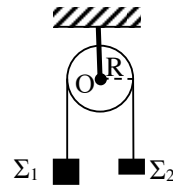
δ. το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί ο κύλινδρος από την στιγμή που αφήνεται ελεύθερος μέχρι την στιγμή που το κέντρο μάζας του έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά $h_2 = 2,4 \text{ m}$.

Μονάδες 6



Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

14. [Ομογενείς 2008] Η ομογενής τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M = 6 \text{ kg}$ και ακτίνα $R = 0,3 \text{ m}$. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν αντίστοιχα μάζες $m_1 = 5 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$. Η τροχαλία και τα σώματα Σ_1, Σ_2 είναι αρχικά ακίνητα και τα κέντρα μάζας των Σ_1, Σ_2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Να υπολογίσετε:



- α. το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία θα κινηθούν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 .
- β. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.
- γ. το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας, ως προς τον άξονα περιστροφής της, την χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

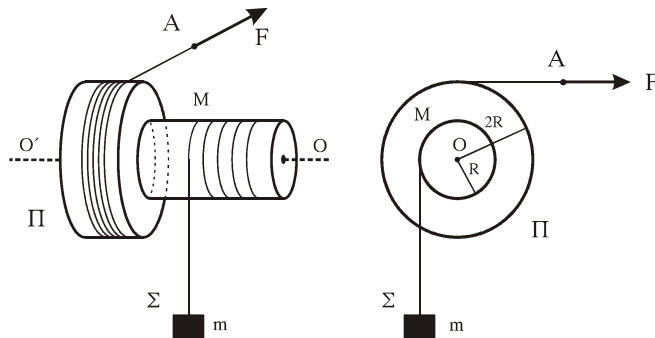
Μονάδες 6
Μονάδες 6

δ. την χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία η κατακόρυφη απόσταση των κέντρων μάζας των Σ_1, Σ_2 θα είναι $h = 3 \text{ m}$.

Μονάδες 6
Μονάδες 7

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$. **Σημείωση:** Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο νήμα είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση. Να θεωρήσετε ότι τα σώματα Σ_1, Σ_2 δεν φτάνουν στο έδαφος ούτε συγκρούονται με την τροχαλία.

15. [Ημερ. Λύκειο 2009] Στερεό Π μάζας $M = 10 \text{ kg}$ αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες R και $2R$, όπου $R = 0,2 \text{ m}$ όπως στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας του στερεού Π ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = MR^2$. Το στερεό Π περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα $O'O$, που συμπίπτει με τον άξονά του. Το σώμα Σ μάζας $m = 20 \text{ kg}$ κρέμεται από το ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος που είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο ακτίνας R . Γύρω από το τμήμα του στερεού Π με ακτίνα $2R$ είναι τυλιγμένο πολλές φορές νήμα, στο ελεύθερο άκρο Α του οποίου μπορεί να ασκείται οριζόντια δύναμη F .



α. Να βρείτε το μέτρο της αρχικής δύναμης F_0 που ασκείται στο ελεύθερο άκρο Α του νήματος, ώστε το σύστημα που εικονίζεται στο σχήμα να παραμένει ακίνητο.

Μονάδες 3

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που το σύστημα του σχήματος είναι ακίνητο, αυξάνουμε την δύναμη ακαριαία έτσι ώστε να γίνει $F = 115 \text{ N}$.

β. Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος Σ.

Μονάδες 5

Για την χρονική στιγμή που το σώμα Σ έχει ανέλθει κατά $h = 2 \text{ m}$, να βρείτε:

γ. Το μέτρο της στροφορμής του στερεού Π ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Μονάδες 6

δ. Την μετατόπιση του σημείου Α από την αρχική του θέση.

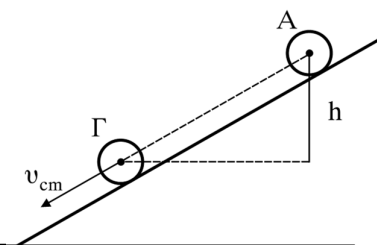
Μονάδες 6

ε. Το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του στερεού Π κατά την μετατόπιση του σώματος Σ κατά h .

Μονάδες 5

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$. Το συνολικό μήκος κάθε νήματος παραμένει σταθερό.

16. [Εσπ. Λύκειο 2009] Ομογενής και συμπαγής κύλινδρος μάζας $m = 5 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ αφήνεται από την ηρεμία (θέση Α) να κυλήσει κατά μήκος πλάγιου επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Την στιγμή που το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει κατακόρυφη μετατόπιση h (θέση Γ), η ταχύτητα του κέντρου μάζας του είναι $v_{cm} = 8 \text{ m/s}$. Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$. Να υπολογίσετε:



α. Την γωνιακή ταχύτητα ω του κυλίνδρου στην θέση Γ.

Μονάδες 6

β. Την στροφορμή του κυλίνδρου στην θέση Γ.

Μονάδες 6

γ. Την κατακόρυφη μετατόπιση h.

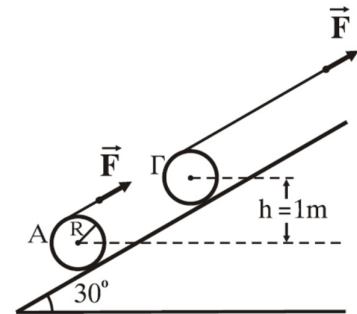
Μονάδες 6

δ. Τον λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου σε κάποια χρονική στιγμή, κατά την διάρκεια της κίνησής του.

Μονάδες 7

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$.

17. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2009] Στην επιφάνεια ενός ομογενούς κυλίνδρου μάζας $M = 40 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$, έχουμε τυλίξει λεπτό σχοινί αμελητέας μάζας, το ελεύθερο άκρο του οποίου έλκεται με σταθερή δύναμη F παράλληλη προς την επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσεως 30° , όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σχοινί ξετυλίγεται χωρίς ολίσθηση, περιστρέφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ο κύλινδρος κυλιέται πάνω στην επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου χωρίς ολίσθηση.



α. Να υπολογισθεί το μέτρο της δύναμης F , ώστε ο κύλινδρος να ανεβαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα.

Μονάδες 5

Αν αρχικά ο κύλινδρος είναι ακίνητος με το κέντρο μάζας του στην θέση Α και στο ελεύθερο άκρο του σχοινιού ασκηθεί σταθερή δύναμη $F = 130 \text{ N}$, όπως στο σχήμα:

β. Να υπολογισθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογισθεί το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του όταν το κέντρο μάζας του περνάει από την θέση Γ του σχήματος, η οποία βρίσκεται $h = 1 \text{ m}$ ψηλότερα από τη θέση Α.

Μονάδες 7

δ. Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης F κατά την μετακίνηση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου από την θέση Α στη θέση Γ και να δείξετε ότι αυτό ισούται με την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του κυλίνδρου κατά την μετακίνηση αυτή.

Μονάδες 7

Δίνονται: επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής

του $I = \frac{1}{2}MR^2$, $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$.

18. [Ημερ. Λύκειο 2010] Θέλουμε να μετρήσουμε πειραματικά την άγνωστη ροπή αδράνειας δίσκου μάζας $m = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας $r = 1 \text{ m}$. Για τον σκοπό αυτόν αφήνουμε τον δίσκο να κυλίσει χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\phi = 30^\circ$ ξεκινώντας από την ηρεμία. Διαπιστώνουμε ότι ο δίσκος διανύει την απόσταση $x = 2 \text{ m}$ σε χρόνο $t = 1 \text{ s}$.

Δ1. Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

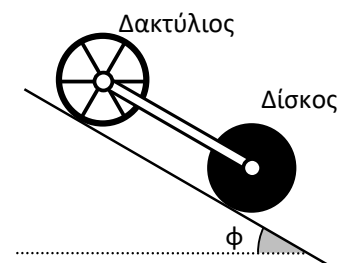
Μονάδες 7

Δ2. Από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου αφήνονται να κυλίσουν ταυτόχρονα δίσκος και δακτύλιος ίδιες μάζας M και ίδιας ακτίνας R . Η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$ και του δακτυλίου $I_2 = MR^2$

ως προς τους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους και είναι κάθετοι στα επίπεδά τους. Να υπολογίσετε ποιο από τα σώματα κινείται με την μεγαλύτερη επιτάχυνση.

Μονάδες 4

Συνδέουμε με κατάλληλο τρόπο τα κέντρα μάζας των δύο στερεών όπως φαίνεται και στο σχήμα με ράβδο αμελητέας μάζας η οποία δεν εμποδίζει την περιστροφή τους και δεν ασκεί τριβές. Το σύστημα κυλιέται στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει.



Δ3. Να υπολογίσετε τον λόγο των κινητικών ενεργειών K_1/K_2 όπου K_1 η κινητική ενέργεια του δίσκου και K_2 η κινητική ενέργεια του δακτυλίου.

Μονάδες 6

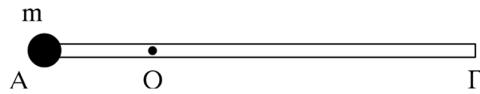
Δ4. Αν η μάζα κάθε στερεού είναι $M = 1,4 \text{ kg}$, να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκεί η ράβδος σε κάθε σώμα. Μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιό σας

και σχεδιάστε τις πιο πάνω δυνάμεις. Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Να μην χρησιμοποιήσετε το χαρτί μιλιμετρέ που βρίσκεται στο τέλος του τετραδίου.

Μονάδες 8

19. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2010] Λεπτή ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους ℓ και μάζας M μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στην ράβδο χωρίς τριβές, ο οποίος διέρχεται από το σημείο O της ράβδου. Η απόσταση του σημείου O από το A είναι $\ell/4$. Στο άκρο A της ράβδου στερεώνεται σημειακή μάζα m , όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση και δέχεται από τον άξονα δύναμη μέτρου $F = 20\text{N}$.



Δ1. Να υπολογιστούν οι μάζες m και M .

Μονάδες 5

Στην συνέχεια τοποθετούμε τον άξονα περιστροφής της ράβδου στο άκρο Γ , ώστε να παραμένει οριζόντια και κάθετος στην ράβδο, και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να περιστραφεί από την οριζόντια θέση. Να υπολογίσετε:

Δ2. το μήκος ℓ της ράβδου, αν την στιγμή που αφήνεται ελεύθερη έχει γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{γων} = 3,75 \text{ rad/s}^2$.

Μονάδες 7

Δ3. τον λόγο της κινητικής ενέργειας της μάζας m προς την συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος, κατά την διάρκεια της περιστροφής του συστήματος των δύο σωμάτων.

Μονάδες 5

Δ4. το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των δύο σωμάτων, όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία ϕ ως προς την οριζόντια διεύθυνση τέτοια, ώστε $\eta\mu\phi = 0,3$.

Μονάδες 8

Δίνονται: η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στην ράβδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} M\ell^2$.

20. [Εσπερ. Λύκειο Επαναλ. 2010] Ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $L = 1\text{m}$ και μάζας $M = 3 \text{ kg}$ ισορροπεί οριζόντια, όπως στο σχήμα. Το άκρο A της ράβδου στηρίζεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο Γ συνδέεται με την οροφή με κατακόρυφο σχοινί. Κάποια στιγμή κόβουμε το σχοινί και η ράβδος αφήνεται να περιστραφεί γύρω από την άρθρωση χωρίς τριβές. Η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σ' αυτήν,

είναι: $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$. Να υπολογίσετε:

Δ.1. την δύναμη που δέχεται η ράβδος από το σχοινί, όταν αυτή ισορροπεί.

Μονάδες 6

Δ.2. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης την στιγμή που κόβεται το σχοινί και η ράβδος είναι οριζόντια.

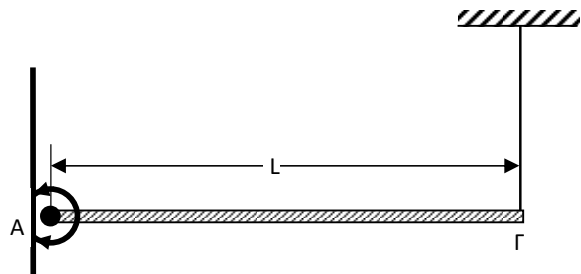
Μονάδες 6

Δ.3. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου στην κατακόρυφη θέση της.

Μονάδες 6

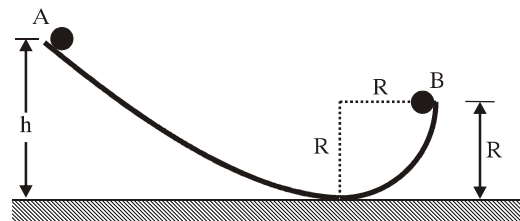
Δ.4. τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής στην κατακόρυφη θέση της.

Μονάδες 7



21. [Ομογενείς 2010] Μια μικρή σφαίρα μάζας $m = 1 \text{ kg}$, ακτίνας $r = 0,02 \text{ m}$ και ροπής αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{2}{5} mr^2$, αφήνεται από το

σημείο A που βρίσκεται σε ύψος $h = 9 \text{ m}$ πάνω από το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Όταν η σφαίρα διέρχεται από το σημείο B του οδηγού, το οποίο απέχει απόσταση $R = 2 \text{ m}$ από το οριζόντιο επίπεδο, να υπολογίσετε :



Δ1. την ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο B και είναι παράλληλος προς τον άξονα περιστροφής της.

Μονάδες 6

Δ2. το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας.

Μονάδες 6

Δ3. το μέτρο της στροφορμής της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της.

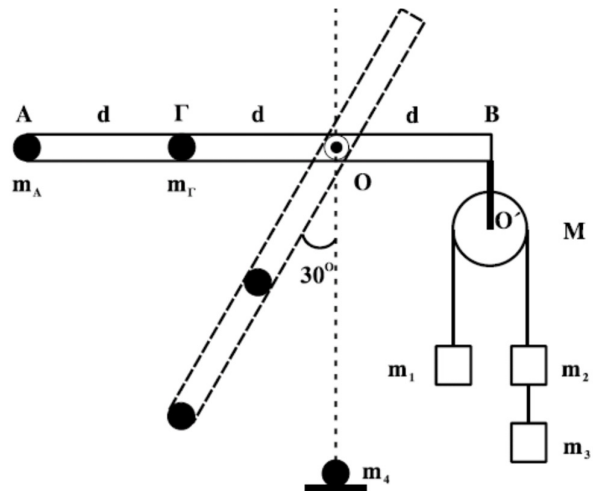
Μονάδες 6

Δ4. το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάσει το κέντρο μάζας της σφαίρας, από το σημείο B .

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Μονάδες 7

22. [Ημερ. Λύκειο 2011] Αβαρής ράβδος μήκους $3d$ ($d = 1 \text{ m}$) μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το O . Στο άκρο A που βρίσκεται σε απόσταση $2d$ από το O υπάρχει σημειακή μάζα $m_A = 1 \text{ kg}$ και στο σημείο Γ , που βρίσκεται σε απόσταση d από το O έχουμε επίσης σημειακή μάζα $m_\Gamma = 6 \text{ kg}$. Στο άλλο άκρο της ράβδου, στο σημείο B , είναι αναρτημένη τροχαλία μάζας $M = 4 \text{ kg}$ από την οποία κρέμονται οι μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = m_3 = 1 \text{ kg}$. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα O' .



Δ1. Αποδείξτε ότι το σύστημα ισορροπεί με την ράβδο στην οριζόντια θέση.

Μονάδες 4

Κόβουμε το $O'B$, που συνδέει την τροχαλία με την ράβδο στο σημείο B .

Δ2. Βρείτε την γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, όταν αυτή σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφο.

Μονάδες 7

Όταν η σημειακή μάζα m_A φτάνει στο κατώτατο σημείο, συγκρούεται πλαστικά με ακίνητη σημειακή μάζα $m_4 = 5 \text{ kg}$.

Δ3. Βρείτε την γραμμική ταχύτητα του σημείου A αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 6

Στην αρχική διάταξη, όταν η τροχαλία με τα σώματα είναι δεμένη στο B , κόβουμε το νήμα που συνδέει μεταξύ τους τα σώματα m_2 και m_3 και αντικαθιστούμε την m_A με μάζα m .

Δ4. Πόση πρέπει να είναι η μάζα m , ώστε η ράβδος να διατηρήσει την ισορροπία της κατά την διάρκεια περιστροφής της τροχαλίας;

Μονάδες 8

Τα νήματα είναι αβαρή, τριβές στους άξονες δεν υπάρχουν και το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\eta_{30^\circ} = 1/2$, ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I = MR^2/2$.

23. [Εσπ. Λύκειο 2011] Η τροχαλία του σχήματος είναι ομογενής με μάζα $m = 4 \text{ kg}$ και ακτίνα $R = 0,5 \text{ m}$. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα και βρίσκονται αρχικά ακίνητα στο ίδιο ύψος. Κάποια στιγμή ($t_0 = 0$) αφήνονται ελεύθερα. Να βρείτε:

Δ1. Το μέτρο της επιτάχυνσης που θα αποκτήσουν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 .

Μονάδες 7

Δ2. Τα μέτρα των τάσεων των νημάτων.

Μονάδες 4

Δ3. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας την στιγμή $t = 2 \text{ s}$.

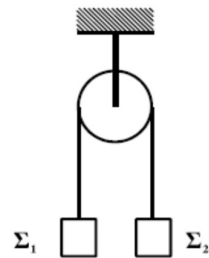
Μονάδες 6

Δ4. Την κινητική ενέργεια του συστήματος, την στιγμή που το κάθε σώμα έχει μετατοπιστεί κατά $h = 3 \text{ m}$.

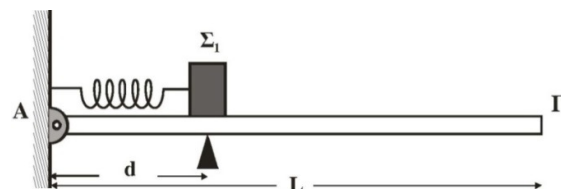
Μονάδες 8

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της

$I = \frac{1}{2} mR^2$. Τα νήματα δεν ολισθαίνουν στην τροχαλία.



24. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2011] Λεία οριζόντια σανίδα μήκους $L = 3 \text{ m}$ και μάζας $M = 0,4 \text{ kg}$ αρθρώνεται στο άκρο της A σε κατακόρυφο τοίχο. Σε απόσταση $d = 1 \text{ m}$ από τον τοίχο, η σανίδα στηρίζεται ώστε να διατηρείται οριζόντια. Ιδανικό αβαρές ελατήριο σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$ συνδέεται με το ένα άκρο του στον τοίχο και το άλλο σε σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, ο άξονάς του είναι οριζόντιος και διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος Σ_1 . Το κέντρο μάζας του σώματος Σ_1 βρίσκεται σε απόσταση d από τον τοίχο. Στην συνέχεια, ασκούμε στο σώμα Σ_1 σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 40 \text{ N}$ με κατεύθυνση προς το άλλο άκρο Γ της σανίδας. Όταν το σώμα Σ_1 διανύσει απόσταση $s = 5 \text{ cm}$, η δύναμη παύει να ασκείται στο σώμα και, στην συνέχεια, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



Δ1. Να υπολογίσετε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ_1 .

Μονάδες 5

Δ2. Να εκφράσετε το μέτρο της δύναμης F_A που δέχεται η σανίδα από τον τοίχο σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος Σ_1 και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Για τον σχεδιασμό της γραφικής παράστασης να χρησιμοποιηθεί χαρτί μιλιμετρέ.

Μονάδες 7

Κατά μήκος της σανίδας από το άκρο Γ κινείται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1 \text{ kg}$ με ταχύτητα $u_2 = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, όταν η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 είναι x_1 , όπου $x_1 \geq 0$. Το σώμα Σ_1 μετά την κρούση ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος.

Δ3. Να βρείτε την απομάκρυνση x_1 .

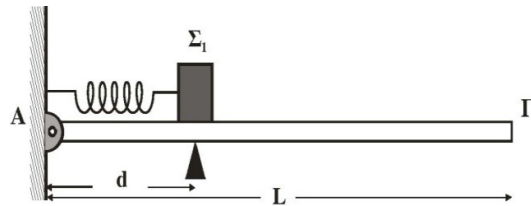
Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε μετά από πόσο χρονικό διάστημα από την στιγμή της κρούσης τα δύο σώματα θα συγκρουστούν για δεύτερη φορά.

Μονάδες 7

Θεωρούμε θετική την φορά της απομάκρυνσης προς το Γ . Τριβές στην άρθρωση και στο υποστήριγμα δεν υπάρχουν. Δίνεται: επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

25. [Εσπερ. Λύκειο Επαναλ. 2011] Λεία οριζόντια σανίδα μήκους $L = 3 \text{ m}$ και μάζας $M = 0,4 \text{ kg}$ αρθρώνεται στο άκρο της A σε κατακόρυφο τοίχο. Σε απόσταση $d = 1 \text{ m}$ από τον τοίχο, η σανίδα στηρίζεται ώστε να διατηρείται οριζόντια. Ιδανικό αβαρές ελατήριο σταθεράς $K = 100 \text{ N/m}$ συνδέεται με το ένα άκρο του στον τοίχο και το άλλο σε σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, ο άξονάς του είναι οριζόντιος και διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος Σ_1 . Το κέντρο μάζας του σώματος Σ_1 βρίσκεται σε απόσταση d από τον τοίχο. Στην συνέχεια, ασκούμε στο σώμα Σ_1 σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 40 \text{ N}$ με κατεύθυνση προς το άλλο άκρο Γ της σανίδας. Όταν το σώμα Σ_1 διανύσει απόσταση $s = 5 \text{ cm}$, η δύναμη παύει να ασκείται στο σώμα και, στην συνέχεια, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



Δ1. Να υπολογίσετε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ_1 .

Μονάδες 5

Δ2. Να εκφράσετε το μέτρο της δύναμης F_A που δέχεται η σανίδα από τον τοίχο σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος Σ_1 και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Για τον σχεδιασμό της γραφικής παράστασης να χρησιμοποιηθεί χαρτί μιλιμετρέ.

Μονάδες 7

Κατά μήκος της σανίδας από το άκρο Γ κινείται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1 \text{ kg}$ με ταχύτητα $u_2 = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, όταν η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 είναι x_1 , όπου $x_1 \geq 0$. Το σώμα Σ_1 μετά την κρούση ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος.

Δ3. Να βρείτε την απομάκρυνση x_1 .

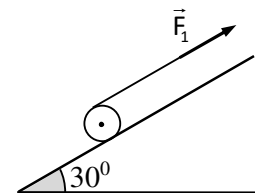
Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το πλάτος της νέας ταλάντωσης που θα κάνει το Σ_1 .

Μονάδες 7

Θεωρούμε θετική την φορά της απομάκρυνσης προς το Γ . Τριβές στην άρθρωση και στο υποστήριγμα δεν υπάρχουν. Δίνεται: επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

26. [Ομογενείς 2011] Ομογενής δίσκος μάζας $m = 4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,1 \text{ m}$ είναι ακίνητος πάνω σε πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi = 30^\circ$ με τον άξονά του οριζόντιο. Γύρω από τον δίσκο είναι τυλιγμένο λεπτό, αβαρές και μη ελαστικό νήμα. Στην ελεύθερη άκρη του νήματος ασκείται σταθερή δύναμη μέτρου F_1 με διεύθυνση παράλληλη προς την επιφάνεια του πλάγιου επιπέδου και με φορά προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Δ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο δίσκος από το πλάγιο επίπεδο.

Μονάδες 6

Αντικαθιστούμε την δύναμη F_1 με δύναμη F_2 ίδιας κατεύθυνσης με την F_1 και μέτρου $F_2 = 7 \text{ N}$, με αποτέλεσμα ο δίσκος να αρχίσει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει προς τα κάτω. Το νήμα τυλίγεται γύρω από τον δίσκο χωρίς να ολισθαίνει.

Δ2. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου, καθώς και την νέα τιμή της στατικής τριβής.

Μονάδες 7

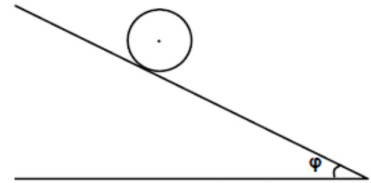
Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σημείου εφαρμογής της F_2 την χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο δίσκος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το διάστημα που διάνυσε το κέντρο μάζας του δίσκου από την στιγμή που άρχισε να κινείται μέχρι την χρονική στιγμή t_1 . **Μονάδες 7**

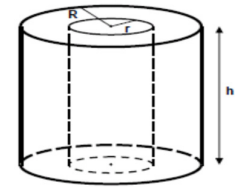
Δίνονται: $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2}mR^2$.

27. [Ημερ. Λύκ. 2013] Δίνεται συμπαγής, ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R . Αφήνουμε τον κύλινδρο να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Δ1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Ο άξονας του κυλίνδρου διατηρείται οριζόντιος. **Μονάδες 5**

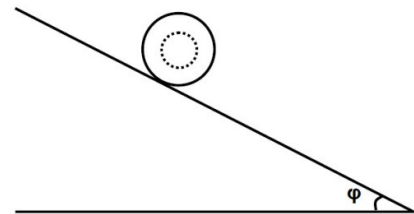
Δ2. Από το εσωτερικό αυτού του κυλίνδρου, που έχει ύψος h , αφαιρούμε πλήρως έναν ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας r , όπου $r < R$, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα: Να αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου, ως προς τον άξονα του, που προκύπτει μετά την αφαίρεση του εσωτερικού κυλινδρικού τμήματος,



$$I_{\text{κοιλ}} = \frac{1}{2}MR^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right).$$

Μονάδες 7

Στην συνέχεια λιπαίνουμε το κυλινδρικό τμήμα που αφαιρέσαμε και το επανατοποθετούμε στην θέση του, ούτως ώστε να εφαρμόζει απόλυτα με τον κοίλο κύλινδρο χωρίς τριβές. Το νέο σύστημα που προκύπτει αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



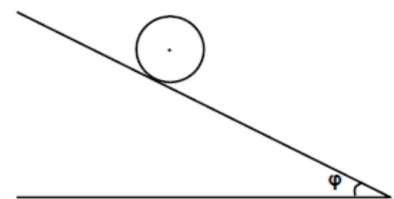
Δ3. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος. **Μονάδες 7**

Δ4. Όταν $r = \frac{R}{2}$ να υπολογίσετε σε κάθε χρονική στιγμή της κύλισης στο κεκλιμένο επίπεδο, τον λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του συστήματος. **Μονάδες 6**

Ο άξονας του συστήματος διατηρείται πάντα οριζόντιος.

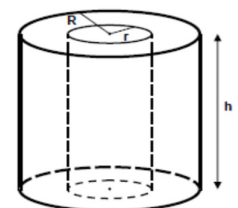
Η ροπή αδράνειας I συμπαγούς και ομογενούς κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R , ως προς τον άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται: $I = \frac{1}{2}MR^2$. Ο όγκος V ενός συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους h : $V = \pi R^2 h$.

28. [Εσπερ. Λύκ. 2013] Δίνεται συμπαγής, ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R . Αφήνουμε τον κύλινδρο να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Δ1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Ο άξονας του κυλίνδρου διατηρείται οριζόντιος. **Μονάδες 6**

Δ2. Από το εσωτερικό αυτού του κυλίνδρου, που έχει ύψος h , αφαιρούμε πλήρως έναν ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας r , όπου $r = \frac{R}{2}$ και μάζας $m = \frac{M}{4}$, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα: Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου, ως προς τον άξονα του, που προκύπτει μετά την αφαίρεση του εσωτερικού κυλινδρικού τμήματος. **Μονάδες 6**



Ο κοίλος κύλινδρος που προκύπτει αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση βαρύτητας g), στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

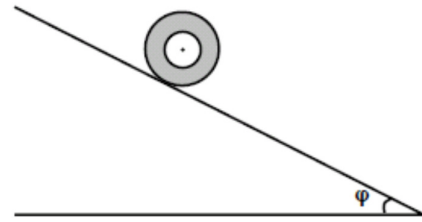
Δ3. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κοίλου κυλίνδρου. Ο άξονας του συστήματος διατηρείται πάντα οριζόντιος.

Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογίσετε, σε κάθε χρονική στιγμή της κύλισης στο κεκλιμένο επίπεδο, τον λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του κοίλου κυλίνδρου. Ο άξονας του συστήματος διατηρείται πάντα οριζόντιος.

Μονάδες 6

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας I συμπαγούς και ομογενούς κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R , ως προς τον άξονα να γύρω από τον οποίο στρέφεται: $I = \frac{1}{2}MR^2$.



29. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2013] Μια ισοπαχής δοκός AB αποτελείται από δύο ομογενή τμήματα AK και KB ,

μήκους $\frac{L}{2}$ το καθένα, με μάζες $m_1 = 5m_2$ και $m_2 = 0,5 \text{ kg}$, αντίστοιχα.

Τα κομμάτια αυτά είναι κολλημένα μεταξύ τους στο σημείο K , ώστε να σχηματίζουν την δοκό AB μήκους $L = 1 \text{ m}$. Η δοκός ισορροπεί σε οριζόντια θέση, με το άκρο της A να στηρίζεται στον τοίχο μέσω άρθρωσης, ενώ το μέσον της K συνδέεται με τον τοίχο με σχοινί που σχηματίζει γωνία $\phi = 30^\circ$ με την δοκό.

Δ1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σχοινί και την άρθρωση.

Μονάδες 6

Κάποια στιγμή το σχοινί κόβεται και η ράβδος αρχίζει να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το άκρο της A σε κατακόρυφο επίπεδο.

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου σε συνάρτηση με την γωνία θ , που σχηματίζει αυτή με την αρχική της θέση ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$).

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του άκρου B' της ράβδου ($u_{B'}$) σε συνάρτηση με την γωνία θ .

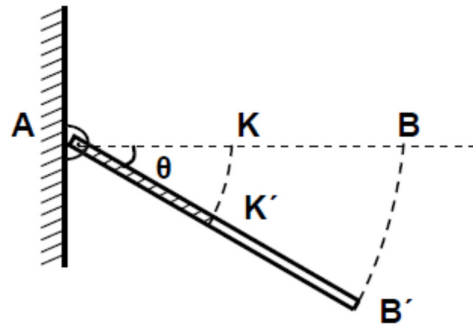
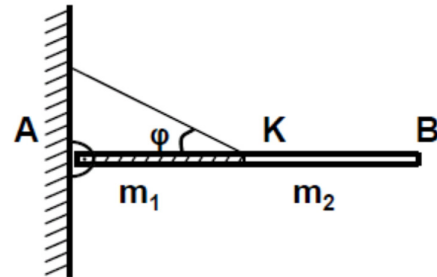
Μονάδες 6

Την στιγμή που η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία $\theta = 30^\circ$, συγκρούεται πλαστικά με αρχικά ακίνητο σφαιρίδιο αμελητέων διαστάσεων και μάζας $m = m_2$, το οποίο σφηνώνεται στο μέσον K' της ράβδου.

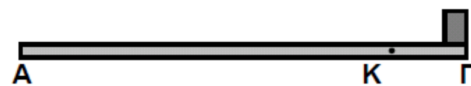
Δ4. Να υπολογίσετε το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση.

Μονάδες 6

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, η ροπή αδράνειας ομογενούς και ισοπαχούς ράβδου μάζας m και μήκους L ως προς άξονα κάθετο στο μέσον της $I = \frac{1}{12}ML^2$, $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



30. [Ομογενείς 2013] Λεπτή ομογενής ράβδος AG μήκους $\ell = 1,5 \text{ m}$ και μάζας M μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβή γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο σε αυτήν, ο οποίος διέρχεται από σημείο K της ράβδου και απέχει από το άκρο Γ απόσταση $d = \ell/6$. Στο άκρο Γ τοποθετούμε σώμα μάζας $m = 3,2 \text{ kg}$ αμελητέων διαστάσεων και το σύστημα ισορροπεί με την ράβδο σε οριζόντια θέση. Να υπολογίσετε:



Δ1. την μάζα M της ράβδου και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον άξονα.

Μονάδες 6

Δ2. την ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος – σώμα ως προς τον άξονα περιστροφής.

Μονάδες 6

Απομακρύνουμε το σώμα μάζας m και την στιγμή $t = 0$ αφήνουμε την ράβδο ελεύθερη να περιστραφεί από την οριζόντια θέση. Να υπολογίσετε:

Δ3. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου την στιγμή $t = 0$.

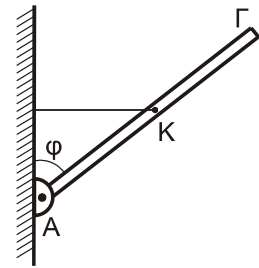
Μονάδες 6

Δ4. το μέτρο της στροφορμής της ράβδου, όταν αυτή σχηματίζει με την αρχική της οριζόντια θέση γωνία ϕ ($\eta\mu\phi = 0,7$) για πρώτη φορά.

Μονάδες 7

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στην ράβδο $I_{cm} = \frac{1}{12} M\ell^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 31.** [Ημερ. Λύκ. 2014] Λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $\ell = 2 \text{ m}$ και μάζας $M = 5,6 \text{ kg}$ ισορροπεί με την βοήθεια οριζώντιου νήματος, μη εκτατού, που συνδέεται στο μέσο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Δίνεται $\eta\mu\phi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\upsilon\phi = 0,8$.



- Δ1.** Να προσδιορίσετε την δύναμη \vec{F} που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

Μονάδες 4

Μικρή ομογενής σφαίρα, μάζας $m = 0,4 \text{ kg}$ και ακτίνας $r = \frac{1}{70} \text{ m}$ κυλιέται χωρίς ολίσθηση, έχοντας εκτοξευθεί κατά μήκος της ράβδου από το σημείο Κ προς το άκρο Γ.

- Δ2.** Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας κατά την κίνησή της από το Κ μέχρι το Γ.

Μονάδες 5

- Δ3.** Με δεδομένο ότι η σφαίρα φτάνει στο άκρο Γ, να βρείτε την σχέση που περιγράφει την τάση του νήματος σε συνάρτηση με την απόσταση του σημείου επαφής της σφαίρας με την ράβδο, από το σημείο Κ.

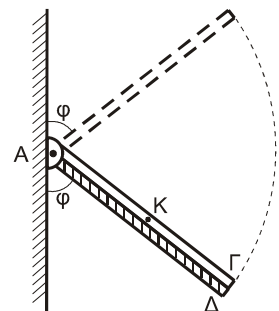
Μονάδες 5

Αφού η σφαίρα έχει εγκαταλείψει τη ράβδο, κόβουμε το νήμα. Η ράβδος στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, χωρίς τριβές.

- Δ4.** Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου στην θέση στην οποία η ράβδος σχηματίζει γωνία ϕ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το άκρο Α, όπως στο παρακάτω σχήμα.

Μονάδες 6

Δεύτερη λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΔ, μήκους $\ell' = \ell$ και μάζας $M' = 3M$ είναι αρθρωμένη και αυτή στο σημείο Α γύρω από τον ίδιο άξονα περιστροφής με την ράβδο ΑΓ. Η ράβδος ΑΔ συγκρατείται ακίνητη, με κατάλληλο μηχανισμό, σε θέση όπου σχηματίζει γωνία ϕ με τον κατακόρυφο τοίχο όπως στο σχήμα. Οι δύο ράβδοι συγκρούονται και ταυτόχρονα ο μηχανισμός ελευθερώνει την ράβδο ΑΔ, χωρίς απώλεια ενέργειας. Οι ράβδοι μετά την κρούση κινούνται σαν ένα σώμα, χωρίς τριβές. Ο χρόνος της κρούσης θεωρείται αμελητέος.



- Δ5.** Να υπολογίσετε το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

Μονάδες 5

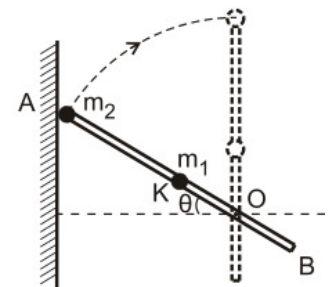
Όλες οι κινήσεις πραγματοποιούνται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας I_p λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους ℓ , ως προς άξονα που διέρχεται από το ένα της άκρο και είναι κάθετος σε αυτή $I_p = \frac{1}{3} M\ell^2$, η ροπή αδράνειας I_{ϕ} ομογενούς σφαίρας μάζας m και ακτίνας r ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\phi} = \frac{2}{5} mr^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ζας m και ακτίνας r ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\phi} = \frac{2}{5} mr^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 32.** [Εσπερ. Λύκ. 2014] Όμοιο με το θέμα των ημερησίων, αλλά μόνο τα ερωτήματα **Δ1**, **Δ2**, **Δ3** και **Δ4** με μονάδες 6, 6, 6 και 7 αντίστοιχα.

- 33.** [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2014] Λεπτή, άκαμπτη και ισοπαχής ράβδος ΑΒ μήκους $\ell = 1 \text{ m}$ και μάζας $M = 3 \text{ kg}$, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από σημείο Ο αυτής, είναι κάθετος στη ράβδο και απέχει από το άκρο της Β απόσταση $OB = d = \frac{1}{4} \text{ m}$.



Στο μέσον Κ της ράβδου και στο άκρο της Α στερεώνουμε δύο σφαιρίδια μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα, όπου $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$. Δίνοντας κατάλληλη ώθηση το σύστημα περιστρέφεται και χτυπά σε κατακόρυφο τοίχο με το άκρο Α, την στιγμή που η ράβδος σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ , τέτοια ώστε $\eta\mu\theta = 0,83$ (σχήμα 1).

Δ1. Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου - σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής. **Μονάδες 6**

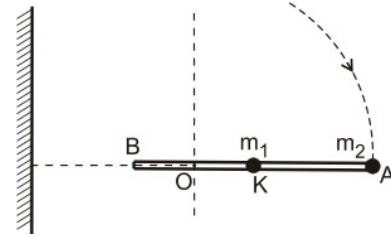
Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω_2 του συστήματος ράβδου - σφαιριδίων αμέσως μετά την κρούση, ώστε αυτό να εκτελέσει οριακά ανακύκλωση. **Μονάδες 6**

Δ3. Κατά την κρούση με τον τοίχο, το ποσοστό απωλειών της κινητικής ενέργειας είναι το 75% της κινητικής ενέργειας του συστήματος ράβδου-σφαιριδίων πριν την κρούση. Να υπολογίσετε την μεταβολή της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του κατά την κρούση. **Μονάδες 7**

Δ4. Όταν το σύστημα ράβδου - σφαιριδίων περνά από την οριζόντια θέση για πρώτη φορά, να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου m_2 ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο O (σχήμα 2).

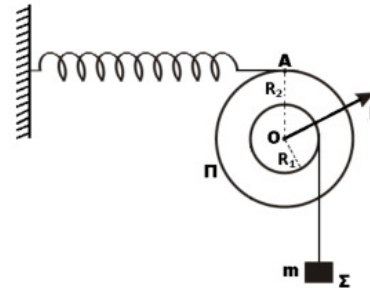
Μονάδες 6

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας I_{cm} λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους ℓ , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτή $I = \frac{1}{12} ML^2$.



34. [Εσπερ. Λύκειο Επαναλ. 2014] Όμοιο με το θέμα των ημερησίων, αλλά στο ερώτημα **Δ4** ζητούσε την γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος αντί του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου.

35. [Ομογενείς 2014] Δύο συγκολλημένοι ομοαξονικοί κύλινδροι με ακτίνες R_1 και $R_2 = 2R_1$ αποτελούν το στερεό Π του σχήματος. Το στερεό έχει μάζα $M = 25 \text{ kg}$, ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ και $R_1 = 0,2 \text{ m}$. Το στερεό μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που συμπίπτει με τον άξονά του, χωρίς τριβές. Το σώμα Σ μάζας $m = 50 \text{ kg}$ κρέμεται από το ελεύθερο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος που είναι τυλιγμένο πολλές φορές στον κύλινδρο ακτίνας R_1 . Με την βοήθεια οριζόντιου ελατηρίου το σύστημα ισορροπεί όπως στο σχήμα.



Δ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου. **Μονάδες 5**

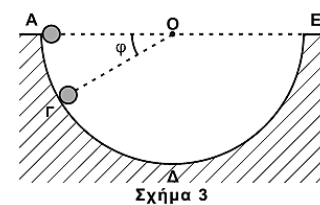
Δ2. Να υπολογίσετε την δύναμη (μέτρο, κατεύθυνση) που ασκεί ο άξονας στο στερεό. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κόβεται το ελατήριο στο σημείο A και το στερεό αρχίζει να στρέφεται. **Μονάδες 6**

Δ3. Να υπολογίσετε την γωνιακή επιτάχυνση του στερεού. **Μονάδες 7**

Δ4. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού την χρονική στιγμή $t = 0,9 \text{ s}$. **Μονάδες 7**

Δίνεται ότι η επιτάχυνση βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

36. [Ημερ. Λύκ. 2015] Από το εσωτερικό άκρο A ενός ημισφαιρίου ακτίνας $R = 1,6 \text{ m}$ αφήνεται να κυλήσει μία συμπαγής μικρή σφαίρα μάζας $m = 1,4 \text{ kg}$ και ακτίνας $r = \frac{R}{8}$. Το ημισφαίριο είναι βυθισμένο στο έδαφος, όπως φαίνεται



στο Σχήμα 3, και η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση

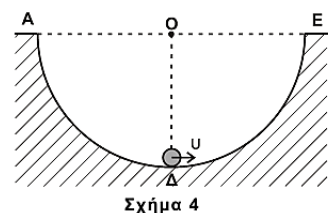
Δ1. Να εκφράσετε την στατική τριβή T_s που ασκείται στην σφαίρα σε συνάρτηση με το συνημίτονο της γωνίας ϕ που σχηματίζει η ακτίνα OΓ του ημισφαιρίου με την ευθεία AE της επιφάνειας του εδάφους. **Μονάδες 6**

Δ2. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί η ημισφαιρική επιφάνεια στην σφαίρα όταν αυτή βρίσκεται στο σημείο Γ όπου $\phi = 30^\circ$ (Σχήμα 3). **Μονάδες 6**

Μια άλλη σφαίρα, όμοια με την προηγούμενη, εκτοξεύεται από το κατώτατο σημείο Δ του ημισφαιρίου με ταχύτητα $u = 6 \text{ m/s}$ και κυλιέται χωρίς ολίσθηση στο εσωτερικό του με κατεύθυνση το άκρο E (Σχήμα 4).

Δ3. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια του εδάφους που θα φτάσει η σφαίρα κατά την κίνησή της. **Μονάδες 7**

Δ4. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας και τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας, αμέσως μόλις αυτή χάσει



την επαφή με την επιφάνεια του ημισφαιρίου στο σημείο Ε .

Μονάδες 6

Δίνονται: ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}mr^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

37. [Εσπερ. Λύκειο 2015] Όμοιο με το θέμα των ημερησίων, αλλά στο ερώτημα Δ4 ζητούσε μόνο τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας με μονάδες 6, 7, 7 και 5 αντίστοιχα.

38. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκειο Επαναλ. 2015] Ομογενής τροχαλία ισορροπεί έχοντας το νήμα τυλιγμένο γύρω της πολλές φορές. Η μία άκρη του νήματος είναι στερεωμένη στην οροφή Ο και η άλλη στο σώμα Σ, το οποίο ισορροπεί κρεμασμένο από κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 40 \text{ N/m}$, που είναι στερεωμένο στην οροφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.

Η μάζα της τροχαλίας είναι $M = 1,6 \text{ kg}$, η ακτίνα της $R = 0,2 \text{ m}$. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο της και ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας της δίνεται από την σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Το σώμα Σ θεωρείται σημειακό αντικείμενο μάζας $m = 1,44 \text{ kg}$. Το νήμα και το ελατήριο έχουν αμελητέες μάζες.

Δ1. Να υπολογίσετε την δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ.

Μονάδες 6

Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα που συνδέει την τροχαλία με το σώμα Σ, και το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Την χρονική στιγμή που μηδενίζεται η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος Σ, για πρώτη φορά, το κέντρο μάζας της τροχαλίας έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά απόσταση h . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

Δ2. Να υπολογίσετε την κατακόρυφη μετατόπιση h της τροχαλίας.

Μονάδες 7

Δ3. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο, θεωρώντας ότι η τιμή $t = 0$ αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή που κόπηκε το νήμα και ότι η φορά απομάκρυνσης του σώματος Σ προς τα επάνω είναι θετική.

Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κάτω άκρου Γ της τροχαλίας, όταν το κέντρο μάζας της τροχαλίας έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά απόσταση h .

Μονάδες 5

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\pi = \sqrt{10}$ και $\pi^2 = 10$ (προσεγγιστικά).

39. [Ομογενείς 2015] Ομογενής δοκός ΑΓ με μήκος $\ell = 3 \text{ m}$ και μάζας $M = 6 \text{ kg}$ φέρει σώμα μικρών διαστάσεων μάζας $m = 3 \text{ kg}$ στην θέση Δ, για την οποία ισχύει $(\Delta\Gamma) = \ell/3$. Η δοκός στηρίζεται με το άκρο της Α σε κατακόρυφο τοίχο μέσω άρθρωσης. Το άκρο Γ της ράβδου συνδέεται με τον τοίχο με αβαρές νήμα, που σχηματίζει γωνία $\phi = 60^\circ$ με τον κατακόρυφο τοίχο και το σύστημα δοκός-σώμα ισορροπεί σε οριζόντια θέση.

Δ1. Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας του συστήματος δοκός - σώμα, ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο Α και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος.

Μονάδες 5

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση.

Μονάδες 6

Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και το σύστημα αρχίζει να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο Α της ράβδου.

Δ3. Να υπολογίσετε την γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος την στιγμή που η ράβδος σχηματίζει γωνία $\theta = 60^\circ$ με την αρχική οριζόντια θέση της.

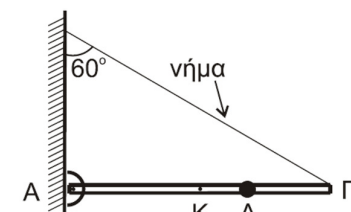
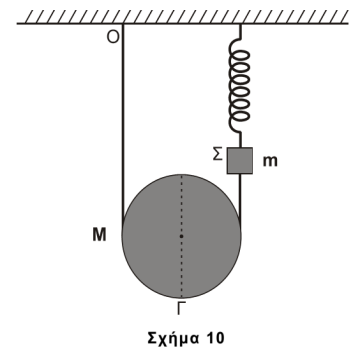
Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογίσετε την ταχύτητα u του σώματος μάζας m την στιγμή που το σύστημα δοκός-σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση.

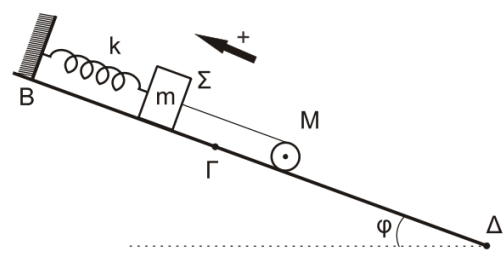
Μονάδες 7

Δίνονται: η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους ℓ , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στην ράβδο $I_{\text{cm}} = M\ell^2/12$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και

$\sin 60^\circ = 1/2$, $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



40. [Ημερ. Λύκ. 2016] Σώμα Σ, μάζας $m = 1 \text{ kg}$, είναι δεμένο στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης $\phi = 30^\circ$. Το τμήμα ΒΓ του κεκλιμένου επιπέδου είναι λείο. Ομογενής κύλινδρος μάζας $M = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,1 \text{ m}$ συνδέεται με το σώμα Σ με την βοήθεια αβαρούς νήματος που δεν επιμηκύνεται. Ο άξονας του κυλίνδρου είναι οριζόντιος. Το νήμα και ο άξονας του ελατηρίου βρίσκονται στην ίδια ευθεία, που είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο. Το σύστημα των σωμάτων ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα.



Δ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος και την επιμήκυνση του ελατηρίου. **Μονάδες 5**
 Την χρονική στιγμή $t = 0$ κόβεται το νήμα. Το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλιέται χωρίς ολίσθηση.

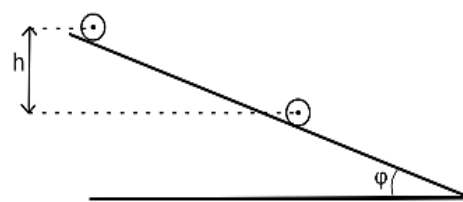
Δ2. Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς για το σώμα Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο, θεωρώντας ως θετική φορά την προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο σχήμα. **Μονάδες 7**

Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου, όταν θα έχει διαγράψει $N = \frac{12}{\pi}$ περιστροφές κατά την κίνηση του στο κεκλιμένο επίπεδο. **Μονάδες 7**

Δ4. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου, κατά την κίνηση του στο κεκλιμένο επίπεδο, την χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$. **Μονάδες 6**

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I_{CM} = MR^2/2$, $\eta\mu 30^\circ = 1/2$.

41. [Εσπερ. Λύκ. 2016] Ομογενής κύλινδρος μάζας $M = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,1 \text{ m}$ αφήνεται να κυλήσει, χωρίς να ολισθαίνει, κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\phi = 30^\circ$. Ο άξονας του κυλίνδρου παραμένει οριζόντιος κατά την κίνησή του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε:



Δ1. Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. **Μονάδες 6**

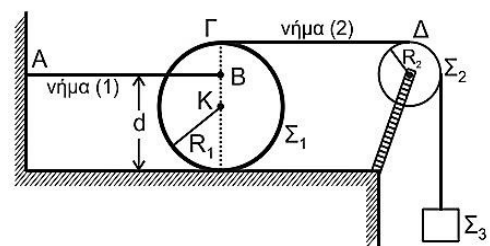
Δ2. Το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου την χρονική στιγμή που έχει εκτελέσει $N = \frac{12}{\pi}$ περιστροφές. **Μονάδες 7**

Δ3. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου, την χρονική στιγμή κατά την οποία η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του είναι $h = 1,2 \text{ m}$. **Μονάδες 6**

Δ4. Την ελάχιστη τιμή του συντελεστή της οριακής στατικής τριβής, ώστε να κυλιέται στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει. **Μονάδες 6**

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I_{cm} = MR^2/2$, $\eta\mu 30^\circ = 1/2$ και $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

42. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2016] Ομογενής δίσκος Σ_1 έχει μάζα $M_1 = 8 \text{ kg}$ και ακτίνα $R_1 = 0,2 \text{ m}$. Στο σημείο Β της κατακόρυφης διαμέτρου του δίσκου, που απέχει απόσταση $d = \frac{3}{2}R_1$ από το οριζόντιο επίπεδο, είναι στερεωμένο οριζόντιο αβαρές μη εκτατό νήμα (1). Το άλλο άκρο Α του νήματος (1) είναι ακλόνητα στερεωμένο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γύρω από την περιφέρεια του δίσκου Σ_1 είναι τυλιγμένο πολλές φορές άλλο δεύτερο αβαρές μη εκτατό νήμα (2), το οποίο διέρχεται από τροχαλία Σ_2 , μάζας $M_2 = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας $R_2 = 0,1 \text{ m}$. Στο άλλο άκρο του νήματος (2) είναι συνδεδεμένο σώμα Σ_3 , μάζας $M_3 = 1 \text{ kg}$. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Το τμήμα ΓΔ του νήματος (2) είναι οριζόντιο.



Δ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης που ασκεί το νήμα (1) στον δίσκο Σ_1 . **Μονάδες 6**

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το νήμα (1) κόβεται. Το σώμα Σ_3 κατέρχεται με επιτάχυνση. Η τροχαλία Σ_2 αρχίζει να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από τον άξονά της και ο δίσκος Σ_1 αρχίζει να κυλιέται, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου Σ_1 . **Μονάδες 10**

Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας Σ_2 την χρονική στιγμή $t_1 = 1$ s. **Μονάδες 5**

Δ4. Να υπολογίσετε την μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ_3 για την κίνηση του από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως την χρονική στιγμή $t_1 = 1$ s. **Μονάδες 4**

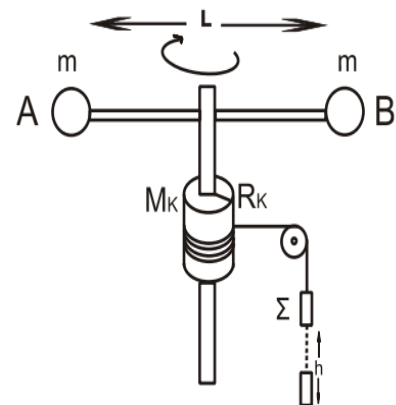
Δίνονται: η ροπή αδρανείας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2$, η ροπή αδρανείας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο

μάζας του $I_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Να θεωρήσετε ότι: η τριβή του νήματος (2) τόσο με τον δίσκο Σ_1 , όσο και με την τροχαλία Σ_2 , είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση, κατά την διάρκεια όλου του φαινομένου, ο δίσκος παραμένει στο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να συγκρούεται με την τροχαλία, ο άξονας περιστροφής του δίσκου δεν αλλάζει κατεύθυνση, κατά την διάρκεια της κίνησής του, το σώμα Σ_3 έχει αμελητέες διαστάσεις και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

43. [Εσπερ. Λύκειο Επαναλ. 2016] Το αντίστοιχο θέμα ήταν όμοιο, είχε όμως μόνο τα ερωτήματα **Δ1, Δ2, Δ3** με αντίστοιχες μονάδες 8, 12 και 5.

44. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2016 (παλαιού τύπου)] Η οριζόντια και ομογενής ράβδος AB του παρακάτω σχήματος, έχει μήκος $L = 0,6$ m και μάζα $M = 3$ kg. Στα άκρα της ράβδου, έχουν στερεωθεί δύο σφαιρίδια αμελητέων διαστάσεων μάζας $m = 0,5$ kg το καθένα. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο λεπτό σωλήνα, που περνάει από το κέντρο της και έχει αμελητέα μάζα και ακτίνα. Στον σωλήνα έχει προσαρμοστεί, σταθερά, ομογενής κύλινδρος μάζας $M_K = 1$ kg και ακτίνας $R_K = 0,2$ m. Γύρω από τον κύλινδρο είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό, αβαρές νήμα σταθερού μήκους, στην ελεύθερη άκρη του οποίου αναρτάται μέσω αβαρούς τροχαλίας, που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, ένα σώμα Σ μάζας $m_1 = 1,25$ kg. Αρχικά το σώμα Σ και το σύστημα (ράβδος, σφαιρίδια και κύλινδρος) είναι ακίνητα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ αφήνεται να κινηθεί κατακόρυφα και το σύστημα ξεκινά να περιστρέφεται, ενώ το νήμα δεν ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:



Δ1. Την συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος που αποτελείται από την ράβδο, τα σφαιρίδια και τον κύλινδρο. **Μονάδες 5**

Δ2. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου. **Μονάδες 5**

Δ3. Το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκεί το νήμα στο σώμα Σ . **Μονάδες 5**

Δ4. Την κινητική ενέργεια του συστήματος λόγω περιστροφής, την χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το σύστημα έχει εκτελέσει $N = \frac{5}{2\pi}$ περιστροφές. **Μονάδες 5**

Δ5. Το ύψος h κατά το οποίο έχει κατέλθει το σώμα Σ την παραπάνω χρονική στιγμή t_1 . **Μονάδες 5**

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$, η ροπή αδράνειας

του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm,K} = \frac{1}{2} M_K R_K^2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

45. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκειο 2017] Μία ομογενής άκαμπτη ράβδος ΑΓ σταθερής διατομής έχει μάζα $M = 4$ kg. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση και το άκρο της Α συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο Γ της ράβδου συνδέεται μέσω αβαρούς μη εκτατού νήματος ΓΔ με τον κατακόρυφο τοίχο. Το νήμα σχηματίζει με τη ράβδο γωνία ϕ . Γύρω από ένα λεπτό ομογενή δίσκο κέντρου Κ, μάζας $m = 2$ kg και ακτίνας $R = 0,1$ m είναι τυλιγμένο πολλές φορές ένα λεπτό μη εκτατό αβαρές νήμα. Το ελεύθερο άκρο του νήματος

έχει στερεωθεί στο άκρο Γ της ράβδου ΑΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα 4: Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο δίσκος αφήνεται να κινηθεί και το νήμα ξετυλιγεται χωρίς να ολισθαίνει

Δ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου, καθώς αυτός κατέρχεται.

Μονάδες 6

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος ΑΓ στο άκρο της Γ από το νήμα ΓΔ, όταν ο δίσκος κατέρχεται.

Μονάδες 6

Την χρονική στιγμή που το κέντρο μάζας Κ του δίσκου έχει κατέλθει κατακόρυφα κατά $h_1 = 0,3$ m το νήμα που συνδέει τον δίσκο με την ράβδο κόβεται.

Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του, μετά από χρονικό διάστημα Δt από την στιγμή που κόπηκε το νήμα.

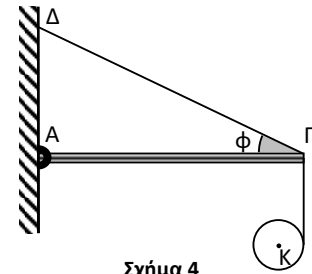
Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε τον λόγο της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφικής κίνησης προς την κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης του δίσκου μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t' = 0,1$ s από την στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Μονάδες 7

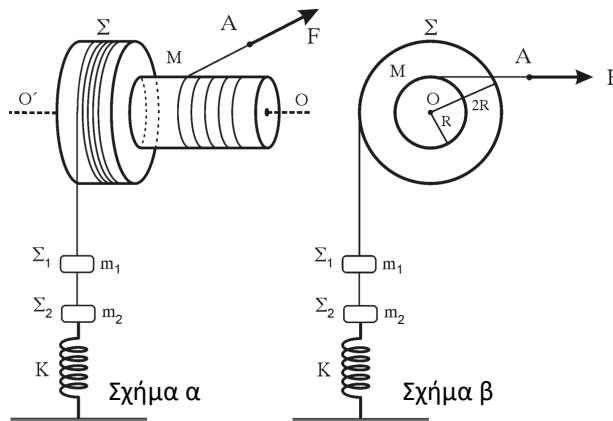
Δίνονται:

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$
- η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2$
- $\eta \mu\phi = 0,8$, $\eta \sigma \nu\phi = 0,6$
- ο άξονας περιστροφής του δίσκου παραμένει συνεχώς οριζόντιος και κινείται σε κατακόρυφη τροχιά σε όλη την διάρκεια της κίνησης του
- ο δίσκος δεν φτάνει στο έδαφος στην διάρκεια του φαινομένου.



Σχήμα 4

46. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2017] Ομογενές στερεό σώμα Σ συνολικής μάζας $M = 8$ kg αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες R και 2R, όπου $R = 0,1$ m όπως φαίνεται στα σχήματα α και β (το β αποτελεί εγκάρσια τομή του α). Η ροπή αδράνειας του στερεού Σ ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{3}{2} MR^2$. Το στερεό Σ



μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα $O'O$. Ο οριζόντιος άξονας περιστροφής συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου. Γύρω από τον κύλινδρο του στερεού ακτίνας R είναι τυλιγμένο πολλές φορές αβαρές μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους, στο ελεύθερο άκρο Α του οποίου ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 100$ N. Στο ελεύθερο άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος μεγάλου μήκους, που είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο ακτίνας 2R, είναι δεμένο σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 2$ kg. Το σώμα Σ_1 συνδέεται με αβαρές μη εκτατό νήμα με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1$ kg, που συγκρατείται στερεωμένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς Κ.

Το σύστημα του στερεού Σ και των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αρχικά ισορροπεί, με το ελατήριο να έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell = 0,2$ m από το φυσικό του μήκος. Την χρονική στιγμή μηδέν ($t_0 = 0$) το νήμα που συνδέει τα σώματα Σ_1 και Σ_2 κόβεται. Το σώμα Σ_2 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ενώ το στερεό Σ αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα περιστροφής του $O'O$.

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς Κ του ελατηρίου.

Μονάδες 5

Δ2. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 . Θεωρήστε ως θετική φορά την φορά προς τα πάνω.

Μονάδες 6

Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 (μονάδες 4) και να προσδιορίσετε την κατεύθυνσή της (μονάδα 1).

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του στερεού Σ.

Μονάδες 4

Δ5. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F, όταν το στερεό Σ έχει εκτελέσει $\frac{20}{\pi}$ περιστροφές.

Μονάδες 5

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Όπου εμφανίζεται το π να μην γίνει αριθμητική αντικατάσταση.

Να θεωρήσετε ότι :

- κατά την διάρκεια της περιστροφής του στερεού Σ το σώμα Σ_1 δεν συγκρούεται με το στερεό Σ .
- η τριβή του νήματος με τους κυλίνδρους του στερεού είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση.
- κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 , ο άξονας του ελατηρίου παραμένει κατακόρυφος.
- η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

47. [Ομογενείς 2017] Ομογενές στερεό σώμα Σ συνολικής μάζας $M = 8 \text{ kg}$ αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες R και $2R$, όπου $R = 0,1 \text{ m}$ όπως φαίνεται στα σχήματα α και β (το β αποτελεί εγκάρσια τομή του α).

Η ροπή αδράνειας του στερεού Σ ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{3}{2}MR^2$. Το στερεό Σ μπο-

ρεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα $O'O$. Ο οριζόντιος άξονας περιστροφής συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου. Γύρω από τον κύλινδρο του στερεού ακτίνας R είναι τυλιγμένο πολλές φορές αβαρές μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους, στο ελεύθερο άκρο A του οποίου ασκείται οριζόντια δύναμη F .

Στο ελεύθερο άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος μεγάλου μήκους, που είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο ακτίνας $2R$, είναι δεμένο σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 2 \text{ kg}$. Το σώμα Σ_1 συνδέεται με αβαρές μη εκτατό νήμα με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3 \text{ kg}$. Το σύστημα του στερεού Σ και των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αρχικά ισορροπεί.

Δ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F .

Μονάδες 6

Το νήμα που συνδέει τα σώματα Σ_1 και Σ_2 κόβεται και το στερεό Σ αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα περιστροφής του $O'O$.

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 (μονάδες 5) και να προσδιορίσετε την κατεύθυνσή της (μονάδα 1).

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του στερεού Σ .

Μονάδες 6

Δ5. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F , όταν το στερεό Σ έχει εκτελέσει $\frac{20}{\pi}$ περιστροφές.

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

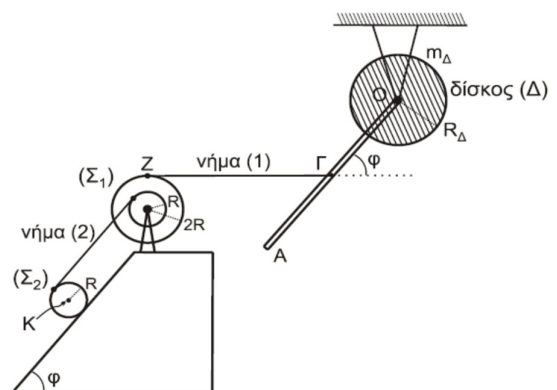
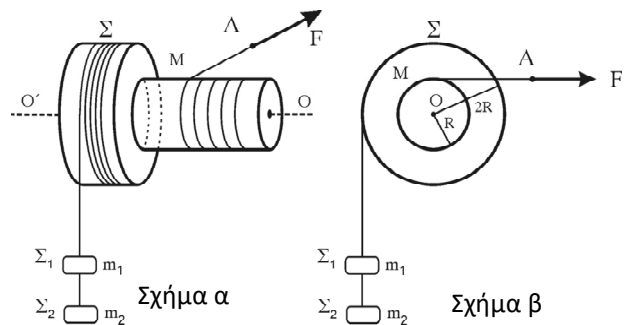
Όπου εμφανίζεται το π να μην γίνει αριθμητική αντικατάσταση.

Να θεωρήσετε ότι :

- κατά την διάρκεια της περιστροφής του στερεού Σ το σώμα Σ_1 δεν συγκρούεται με το στερεό Σ .
- η τριβή του νήματος με τους κυλίνδρους του στερεού είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση.
- η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

48. [Ημερ. Λύκεια 2018] Λεπτή ομογενής ράβδος OA μήκους $\ell = 3 \text{ m}$ και μάζας $M = 8 \text{ kg}$ είναι σταθερά συγκολλημένη με το ένα άκρο της O στο κέντρο ομογενούς δίσκου Δ μάζας $m_\Delta = 4 \text{ kg}$ και ακτίνας $R_\Delta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}$. Το σύ-

στημα των δύο αυτών σωμάτων (ράβδου-δίσκου) μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές ως ένα σώμα γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο O και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου. Το μέσον Γ της ράβδου OA έχει δεθεί με την βοήθεια λεπτού οριζόντιου αβαρούς και μη εκτατού νήματος $Z\Gamma$ (νήμα (1)) με διπλή τροχαλία Σ_1 και η ράβδος σχηματίζει γωνία ϕ με την προέκταση του οριζόντιου νήματος $Z\Gamma$. Η διπλή τρο-



χαλία αποτελείται από δύο ομογενείς συγκολλημένους ομοαξονικούς δίσκους με ακτίνες R και $2R$, όπου $R = 0,2 \text{ m}$ και η ροπή αδράνειάς της ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδο της είναι ίση με $I_{cm(\text{τροχαλίας})} = 1,95 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Ένα δεύτερο λεπτό, αβαρές και μη εκτατό νήμα (2), που είναι παράλληλο σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ , είναι τυλιγμένο πολλές φορές σε ένα λεπτό αυλάκι του εσωτερικού δίσκου ακτίνας R της τροχαλίας Σ_1 και το άλλο του άκρο είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια ενός ομογενούς κυλίνδρου Σ_2 μάζας $m = 30 \text{ kg}$ και ακτίνας R , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το σύστημα όλων των σωμάτων του σχήματος ισορροπεί στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

Δ1. Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο σωμάτων ράβδου-δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής O .

Μονάδες 4

Την χρονική στιγμή $t = 0$ το νήμα $Z\Gamma$ που συνδέει τη ράβδο με την τροχαλία κόβεται και ο κύλινδρος αρχίζει να εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος των δύο σωμάτων ράβδου-δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής O την χρονική στιγμή $t = 0$.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων ράβδου-δίσκου την χρονική στιγμή που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη για πρώτη φορά μετά το κόψιμο του νήματος.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας K του ομογενούς κυλίνδρου (μονάδες 8) καθώς και την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν έχει διανύσει διάστημα $s = 2 \text{ m}$ στο κεκλιμένο επίπεδο (μονάδες 3).

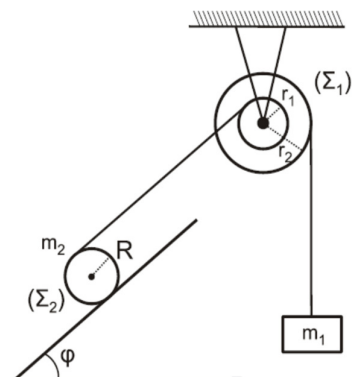
Μονάδες 11

Δίνονται:

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$
 - η ροπή αδράνειας του δίσκου Δ ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του
- $$I_{cm(\Delta)} = \frac{1}{2} m_{\Delta} R_{\Delta}^2$$
- η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι ίση με
- $$I_{cm(\rho)} = \frac{1}{12} M l^2$$
- η ροπή αδράνειας του ομογενούς κυλίνδρου Σ_2 ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι ίση με $I_{cm(\text{κυλίνδρου})} = \frac{1}{2} m R^2$
 - $\eta\mu\phi = 0,8$, $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,6$
 - ο άξονας περιστροφής του ομογενούς κυλίνδρου Σ_2 παραμένει συνεχώς οριζόντιος σε όλη την διάρκεια της κίνησής του
 - το κεκλιμένο επίπεδο είναι μεγάλου μήκους
 - η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές
 - το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο και στην τροχαλία
 - η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα

49. [Εσπερ. Λύκεια 2018] Ομογενής κύλινδρος μάζας $m_2 = 20 \text{ kg}$ και ακτίνας R βρίσκεται σε επαφή με κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ με $\eta\mu\phi = 0,6$. Γύρω από το αυλάκι του κυλίνδρου έχουμε τυλίξει πολλές φορές αβαρές και μη εκτατό νήμα. Το νήμα εξερχόμενο από το πάνω άκρο του κυλίνδρου, τυλίγεται στο εσωτερικό τμήμα μιας διπλής τροχαλίας, η οποία αποτελείται από δύο ομογενείς ομοαξονικούς και συγκολλημένους κυλίνδρους. Από το νήμα που διέρχεται από τον εξωτερικό κύλινδρο κρέμεται σώμα μάζας $m_1 = 3 \text{ kg}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι ίση με $I_{cm(\text{τροχαλίας})} = 0,48 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Οι ακτίνες των κυλίνδρων της διπλής τροχαλίας είναι ίσες με $r_1 = 0,1 \text{ m}$ και $r_2 = 0,2 \text{ m}$. Αρχικά το όλο σύστημα ισορροπεί.

Δ1. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα νήματα στους κυλίνδρους της διπλής τροχαλίας.



Μονάδες 6

Την χρονική στιγμή $t = 0$ το νήμα που συγκρατεί τον κύλινδρο κόβεται. Αν ο κύλινδρος κυλίσεται χωρίς να ολισθαίνει

Δ2. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Μονάδες 6

Δ3. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση με την οποία το σώμα μάζας m_1 κατέρχεται.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της διπλής τροχαλίας την στιγμή που το σώμα μάζας m_1 έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $0,25$ m, μετά το κόψιμο του νήματος.

Μονάδες 7

Δίνονται:

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$
- η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου m_2 ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι ίση με

$$I_{\text{CM(κυλίνδρου)}} = \frac{1}{2} m_2 R^2$$

- ο άξονας περιστροφής του ομογενούς κυλίνδρου m_2 παραμένει συνεχώς οριζόντιος σε όλη την διάρκεια της κίνησής του
- το κεκλιμένο επίπεδο είναι μεγάλου μήκους
- η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές
- το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο και στην τροχαλία
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα

50. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. & Ομογενείς 2018] Συμπαγής ομογενής κύλινδρος μάζας m και ακτίνας $R = 0,1$ m είναι προσδεμένος σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m στο σημείο A και ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο μεγάλου μήκους γωνίας κλίσης ϕ όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Ο άξονας του ελατηρίου είναι παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ακλόνητα στο σημείο Γ. Η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta \ell = 0,06$ m.

Δ1. Να υπολογίσετε την μάζα του κυλίνδρου.

Μονάδες 5

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο κύλινδρος αποσπάται από το ελατήριο και κυλίσεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

Να υπολογίσετε:

Δ2. την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου,

Μονάδες 5

Δ3. το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο κατά την διάρκεια της κύλισής του,

Μονάδες 4

Δ4. τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου την χρονική στιγμή $t = 1$ s.

Μονάδες 5

Έστω ότι στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου είναι ενσωματωμένος σημειακός ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων, ο οποίος φέρει λαμπάκι. Στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου είναι στερεωμένη πηγή S ηχητικών κυμάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6, συχνότητας $f_s = 1700$ Hz. Το λαμπάκι του ανιχνευτή ανάβει όταν ανιχνεύονται συχνότητες μεταξύ των τιμών $f_1 = 1750$ Hz και $f_2 = 1800$ Hz.

Δ5. Κατά την κύλιση του κυλίνδρου στο κεκλιμένο επίπεδο να εξετάσετε αν το λαμπάκι θα ανάψει από την χρονική στιγμή $t_1 = 1$ s μέχρι την χρονική στιγμή $t_2 = 2$ s.

Μονάδες 6

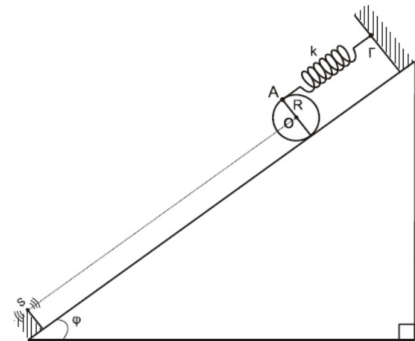
Δίνονται:

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m/s²
- η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι ίση με

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m R^2$$

- $\eta \mu \phi = 0,6$ και $\sin \phi = 0,8$
- η ταχύτητα του ήχου στον αέρα ίση με $u_{\text{ηχ}} = 340$ m/s

Να θεωρήσετε ότι:

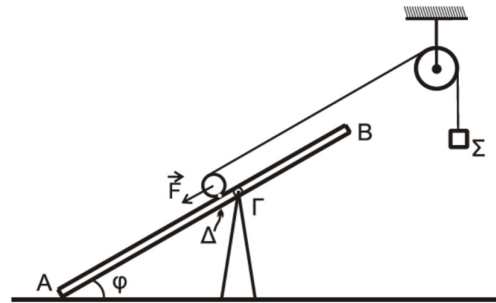


Σχήμα 6

- ο άξονας περιστροφής του κυλίνδρου παραμένει συνεχώς σε οριζόντια θέση σε όλη την διάρκεια της κίνησης του
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα
- η ευθεία που ενώνει την πηγή και τον ανιχνευτή είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο.
- η λήψη των ηχητικών κυμάτων από τον ανιχνευτή δεν επηρεάζεται από την κύλιση και το υλικό του κυλίνδρου.

Στα θέματα των Ομογενών δεν υπήρχε η πηγή και ο ανιχνευτής με μονάδες: $\Delta 1 = 6$, $\Delta 2 = 6$, $\Delta 3 = 6$, $\Delta 4 = 7$.

51. [Ημερ. Λύκεια 2019] Ομογενής, άκαμπτη και μικρού πάχους σανίδα AB μάζας $M = 2 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 4 \text{ m}$ ισορροπεί σε πλάγια θέση με την βοήθεια υποστηρίγματος, το οποίο έχουμε στερεώσει σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η σανίδα ακουμπά με το άκρο της A στο λείο δάπεδο σχηματίζοντας γωνία $\phi = 30^\circ$ με αυτό. Η σανίδα συνδέεται με την κορυφή του υποστηρίγματος με άρθρωση σε σημείο της Γ, το οποίο απέχει από το άκρο της B απόσταση $(BG) = 1,5 \text{ m}$. Η σανίδα μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Γ (κάθετος στο επίπεδο του σχήματος). Ομογενής κύλινδρος μάζας $M_K = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας R_K βρίσκεται σε επαφή με την σανίδα στο σημείο Δ, το οποίο απέχει από το Γ απόσταση $(\Gamma\Delta) = 0,2 \text{ m}$.



Σχήμα 7

Στο μέσον της επιφάνειας του κυλίνδρου, που φέρει ένα λεπτό αυλάκι, έχουμε τυλίξει πολλές φορές λεπτό, αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε δέσει σώμα Σ μικρών διαστάσεων μάζας $M_\Sigma = 2 \text{ kg}$. Το νήμα περνάει από το αυλάκι ομογενούς τροχαλίας μάζας $M_T = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας R_T , την οποία έχουμε στερεώσει σε ακλόνητο σημείο. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχαλίας. Το τμήμα του νήματος που συνδέει τον κύλινδρο με την τροχαλία έχει διεύθυνση παράλληλη με τη σανίδα. Αρχικά ασκούμε δύναμη \vec{F} στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου με διεύθυνση παράλληλη προς την διεύθυνση AB, ώστε το σύστημα κύλινδρος - τροχαλία - σώμα να ισορροπεί, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.

Δ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης \vec{F} .

Μονάδες 4

Την χρονική στιγμή $t = 0$ καταργούμε ακαριαία την δύναμη και το σώμα Σ αρχίζει να κατέρχεται κατακόρυφα, ενώ ο κύλινδρος αρχίζει να ανέρχεται στην σανίδα εκτελώντας κύλιση χωρίς ολίσθηση και το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

Δ2. Να αποδείξετε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ είναι ίσο με 4 m/s^2 και να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Μονάδες 8

Την χρονική στιγμή $t_1 = 0,5 \text{ s}$ κόβουμε ακαριαία το νήμα στο σημείο που εφάπτεται με τον κύλινδρο και στο σημείο πρόσδεσης με το σώμα Σ. Μετά το κόψιμο του νήματος, αυτό δεν εμποδίζει την κίνηση του κυλίνδρου και του σώματος. Ο κύλινδρος συνεχίζει την κίνησή του εκτελώντας κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Δ3. Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_2 στην οποία ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία να κινείται πάνω στην σανίδα.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το συνολικό διάστημα που διάνυσε ο κύλινδρος από την χρονική στιγμή $t = 0$ έως την χρονική στιγμή t_2 .

Μονάδες 3

Δ5. Να δείξετε ότι κατά την διάρκεια της ανόδου του κυλίνδρου πάνω στην σανίδα, από την χρονική στιγμή $t = 0$ έως την χρονική στιγμή t_2 , που ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία, η σανίδα δεν ανατρέπεται.

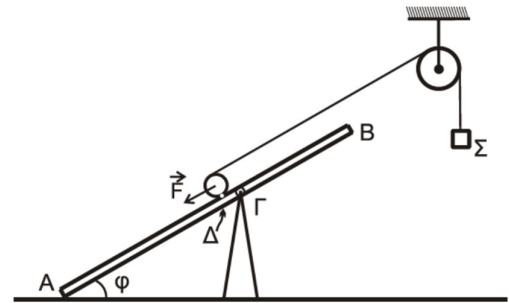
Μονάδες 4

Δίνονται:

- $\eta\mu\phi = 0,5$
- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$
- η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι ίση με $I_{cm(\text{κυλίνδρου})} = \frac{1}{2}M_K R_K^2$
- η ροπή αδράνειας της ομογενούς τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι ίση με $I_{cm(\text{τροχαλίας})} = \frac{1}{2}M_T R_T^2$

- ο άξονας περιστροφής του ομογενούς κυλίνδρου παραμένει συνεχώς οριζόντιος σε όλη την διάρκεια της κίνησής του
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα
- ο χαρακτηρισμός λεπτό νήμα αφορά νήμα αμελητέου πάχους.

52. [Εσπερ. Λύκεια 2019] Ομογενής, άκαμπτη και μικρού πάχους σανίδα AB μάζας $M = 2 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 4 \text{ m}$ ισορροπεί σε πλάγια θέση με την βοήθεια υποστηρίγματος, το οποίο έχουμε στερεώσει σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η σανίδα έχει στερεωμένο το άκρο της A στο δάπεδο σχηματίζοντας γωνία $\phi = 30^\circ$ με αυτό. Η σανίδα συνδέεται με την κορυφή του υποστηρίγματος με άρθρωση σε σημείο της Γ, το οποίο απέχει από το άκρο της B απόσταση $(BG) = 1,5 \text{ m}$. Ομογενής κύλινδρος μάζας $M_K = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας R_K βρίσκεται σε επαφή με την σανίδα στο σημείο Δ, το οποίο απέχει από το Γ απόσταση $(\Gamma\Delta) = 0,2 \text{ m}$. Στο μέσο της επιφάνειας του κυλίνδρου, που φέρει ένα λεπτό αυλάκι, έχουμε τυλίξει πολλές φορές λεπτό, αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε δέσει σώμα Σ μικρών διαστάσεων μάζας $M_\Sigma = 2 \text{ kg}$. Το νήμα περνάει από το αυλάκι ομογενούς τροχαλίας μάζας $M_T = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας R_T , την οποία έχουμε στερεώσει σε ακλόνητο σημείο. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχαλίας. Το τμήμα του νήματος που συνδέει τον κύλινδρο με την τροχαλία έχει διεύθυνση παράλληλη με την σανίδα. Αρχικά ασκούμε δύναμη \vec{F} στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου με διεύθυνση παράλληλη προς την διεύθυνση AB, ώστε το σύστημα κύλινδρος - τροχαλία - σώμα να ισορροπεί, όπως φαίνεται στο **Σχήμα**.



Δ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης \vec{F} .

Μονάδες 5

Την χρονική στιγμή $t = 0$ καταργούμε ακαριαία την δύναμη και το σώμα Σ αρχίζει να κατέρχεται κατακόρυφα, ενώ ο κύλινδρος αρχίζει να ανέρχεται στην σανίδα εκτελώντας κύλιση χωρίς ολίσθηση και το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας. Το σώμα Σ την χρονική στιγμή $t_1 = 0,3 \text{ s}$ έχει κατέβει $0,18 \text{ m}$.

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ και το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Μονάδες 6

Δ3. Να υπολογίσετε την δύναμη που ασκεί το νήμα στον κύλινδρο και την τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από το δάπεδο.

Μονάδες 7

Την χρονική στιγμή $t_2 = 0,5 \text{ s}$ κόβουμε ακαριαία το νήμα στο σημείο που εφάπτεται με τον κύλινδρο και στο σημείο πρόσδεσης με το σώμα Σ. Μετά το κόψιμο του νήματος, αυτό δεν εμποδίζει την κίνηση του κυλίνδρου και του σώματος. Ο κύλινδρος συνεχίζει την κίνησή του εκτελώντας κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Δ3. Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_3 στην οποία ο κύλινδρος σταματά στιγμιαία να κινείται πάνω στη σανίδα.

Μονάδες 7

Δίνονται:

- $\eta\mu\phi = 0,5$
- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$
- η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι

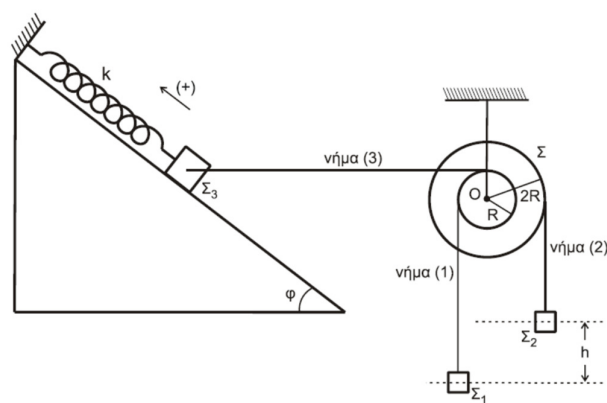
$$\text{ίση με } I_{cm(\text{κυλίνδρου})} = \frac{1}{2} M_K R_K^2$$

- η ροπή αδράνειας της ομογενούς τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της

$$\text{είναι ίση με } I_{cm(\text{τροχαλίας})} = \frac{1}{2} M_T R_T^2$$

- ο άξονας περιστροφής του ομογενούς κυλίνδρου παραμένει συνεχώς οριζόντιος σε όλη την διάρκεια της κίνησής του
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα
- ο χαρακτηρισμός λεπτό νήμα αφορά νήμα αμελητέου πάχους.

53. [Ημερ. Λύκειο Επαναλ. 2019] Στερεό σώμα Σ μάζας $M = 1,5 \text{ kg}$ αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες R και $2R$ αντίστοιχα, όπου $R = 0,1 \text{ m}$ όπως φαίνεται στο **σχήμα**. Το στερεό Σ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του. Η ροπή αδράνειας του στερεού Σ ως προς τον άξονα περιστροφής του, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του O δίνεται από την σχέση $I_z = 2mR^2$. Τα σώματα Σ_1 μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ και Σ_2 μάζας $m_2 = 1,5 \text{ kg}$ κρέμονται στα ελεύθερα άκρα αβαρών και μη εκτατών νημάτων (1) και (2). Τα νήματα είναι πολλές φορές τυλιγμένα στους κυλίνδρους ακτίνας R και $2R$, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο **σχήμα**. Στην κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου μεγάλου μήκους γωνίας κλίσης ϕ , όπου $\eta\mu\phi = 0,8$ και $\sigma\upsilon\eta\phi = 0,6$ στερεώνεται ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 300 \text{ N/m}$ στο άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 3 \text{ kg}$. Ο άξονας του ελατηρίου είναι παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο. Το σώμα Σ_3 συνδέεται με τον κύλινδρο ακτίνας R με την βοήθεια οριζώντιου αβαρούς και μη εκτατού νήματος (3), όπως φαίνεται στο **σχήμα**. Το σύστημα των σωμάτων αρχικά ισορροπεί και τα σώματα Σ_1 και Σ_2 απέχουν κατακόρυφα μεταξύ τους απόσταση $h = 0,48 \text{ m}$.



Δ1. Να υπολογίσετε την επιμήκυνση του ελατηρίου από την θέση του φυσικού του μήκους.

Μονάδες 5

Την χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα (3). Το σώμα Σ_3 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και θετική φορά προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο **σχήμα 5** και το στερεό σώμα Σ αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον σταθερό οριζόντιο άξονά του.

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_3 την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{15} \text{ s}$.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού σώματος Σ .

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του στερεού σώματος Σ ως προς τον άξονα περιστροφής του την χρονική στιγμή που τα σώματα Σ_1 και Σ_2 διέρχονται από το ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

Μονάδες 4

Δ5. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού σώματος Σ την χρονική στιγμή που το σώμα Σ έχει διαγράψει $N = \frac{20}{\pi}$ περιστροφές.

Μονάδες 5

- Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$
- Να θεωρήσετε ότι τα μήκη των νημάτων (1) και (2) είναι πολύ μεγάλα ώστε τα σώματα Σ_1 και Σ_2 να μην συγκρούονται με το στερεό Σ , κατά την διάρκεια της κίνησής τους.
- Να θεωρήσετε ότι τα σώματα $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι πολύ μικρών διαστάσεων.
- Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.
- Να μην γίνει αριθμητική αντικατάσταση του αριθμού π .
-

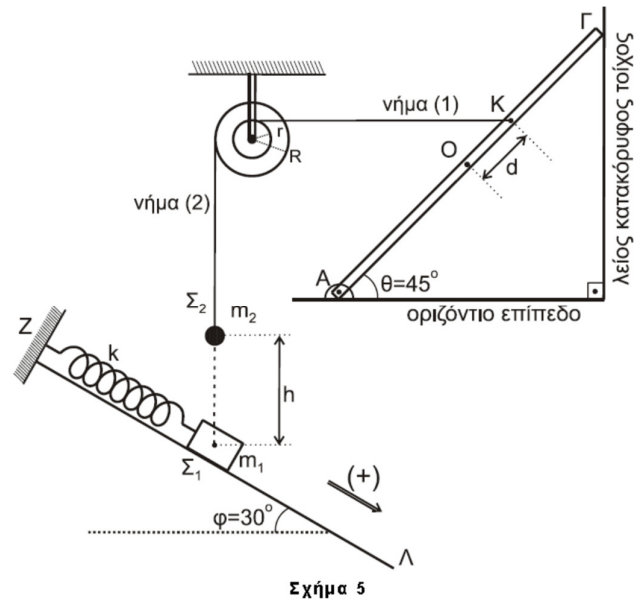
54. [Ομογενείς 2019] δεν υπήρχε το ερώτημα **Δ5** με μονάδες: **Δ1** = 6, **Δ2** = 7, **Δ3** = 6, **Δ4** = 6.

55. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια 2020 (Νέο)]

Μία λεπτή, άκαμπτη και ομογενής ράβδος ΑΓ, μήκους L και μάζας $M = 10 \text{ kg}$ έχει στο άκρο της Α άρθρωση και ισορροπεί στηριζόμενη σε λείο κατακόρυφο τοίχο σχηματίζοντας γωνία $\theta = 45^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο **σχήμα 5**. Σε ένα σημείο Κ, που απέχει $d = \frac{L}{6}$ από το μέσον

της Ο, είναι δεμένο το ένα άκρο ενός οριζόντιου, λεπτού, αβαρούς και μη εκτατού νήματος (1), το άλλο άκρο του οποίου είναι τυλιγμένο γύρω από τον εσωτερικό κύλινδρο ακτίνας r ενός στερεού, που αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους.

Στον εξωτερικό κύλινδρο του στερεού, ακτίνας $R = 2r$, είναι τυλιγμένο ένα δεύτερο λεπτό, αβαρές και μη εκτατό νήμα (2), στο άκρο του οποίου κρέμεται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3 \text{ kg}$. Το σύστημα στερεό-ράβδος είναι ακίνητο.



Δ1. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης, που δέχεται η ράβδος στο σημείο Γ από τον λείο, κατακόρυφο τοίχο.

Μονάδες 6

Στην κορυφή Ζ λείου κεκλιμένου επιπέδου μεγάλου μήκους και γωνίας κλίσης $\phi = 30^\circ$, είναι στερεωμένο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$. Ο άξονας του ελατηρίου είναι παράλληλος με το κεκλιμένο επίπεδο και στο άλλο άκρο του ισορροπεί δεμένο σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$. Το σώμα Σ_1 μάζας m_1 βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το σώμα Σ_2 μάζας m_2 , που κρέμεται στην άκρη του νήματος (2).

Κάποια χρονική στιγμή το νήμα (2) κόβεται και το σώμα Σ_2 , αφού εκτελέσει ελεύθερη πτώση, συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ_1 . Αμέσως μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα αποκτά κοινή ταχύτητα μέ-

τρου $\frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{m}{s}$ και αρχίζει να κινείται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ΖΛ, εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση

με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Δ2. Να υπολογίσετε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα.

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε την σχέση που δίνει την απομάκρυνση του συσσωματώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο. (Να θεωρήσετε ως $t = 0$ την χρονική στιγμή της κρούσης των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 και θετική την φορά από το Ζ προς το Λ).

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως πριν την πλαστική κρούση (ο χρόνος της κρούσης θεωρείται αμελητέος) και την αρχική απόσταση h των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε τον λόγο του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου προς το μέτρο της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης, όταν το σώμα που ταλαντώνεται, βρίσκεται στην θέση της μέγιστης επιμήκυνσης του ελατηρίου.

Μονάδες 4

Δίνονται:

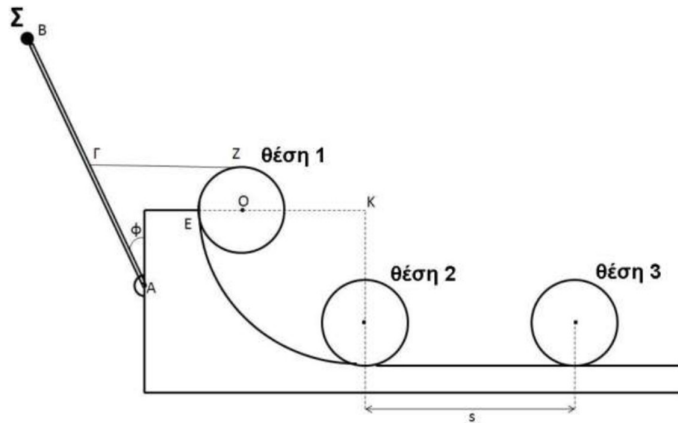
- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$
- $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\eta\mu \frac{7\pi}{6} = \eta\mu \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Να θεωρήσετε ότι:

- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα,
- κατά την κρούση δεν έχουμε απώλεια μάζας,
- ο χαρακτηρισμός «λεπτό νήμα» αφορά νήμα αμελητέου πάχους.

56. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια 2020 (παλαιό)]

Στο σχήμα 4, ομογενής, άκαμπτη και ισοπαχής ράβδος AB μάζας $M_1 = 6 \text{ kg}$ και μήκους $L = 1 \text{ m}$, στηρίζεται με άρθρωση στο ένα άκρο της A σε κατακόρυφο ακλόνητο τοίχο. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος. Στο άκρο B της ράβδου έχει στερεωθεί υλικό σημείο Σ μάζας $m = 1 \text{ kg}$. Με αβαρές, λεπτό και μη εκτατό νήμα, έχουμε δέσει το μέσον Γ της ράβδου με το ανώτερο σημείο Z της περιφέρειας ομογενούς δίσκου μάζας M_2 κέντρου O και ακτίνας $r = 0,1 \text{ m}$. Ο δίσκος ακουμπάει στην κορυφή ακλόνητου τεταρτοκυκλίου ακτίνας $KE = R = 2,8 \text{ m}$ στο σημείο E αυτού (θέση 1), έτσι ώστε το στερεό που αποτελείται από την ράβδο και το υλικό σημείο Σ, καθώς και ο δίσκος, να ισορροπούν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, με την ράβδο να σχηματίζει γωνία ϕ με τον κατακόρυφο τοίχο. Το νήμα είναι οριζόντιο και τεντωμένο και η ακτίνα OE του δίσκου είναι οριζόντια.



Δ1. Να υπολογίσετε:

- 1) το μέτρο της τάσης του νήματος ΓZ (Μονάδες 3)
- 2) την μάζα M_2 του δίσκου (Μονάδες 2)

Μονάδες 5

Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα ΓZ

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού που αποτελείται από την ράβδο και το υλικό σημείο Σ αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος. **Μονάδες 5**

- Δ3.** 1) Να υπολογίσετε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του, μεταξύ της αρχικής του θέσης και της θέσης όπου η ράβδος γίνεται οριζόντια (Μονάδες 5)
- 2) Να προσδιορίσετε την κατεύθυνση του διανύσμά της (Μονάδες 2). **Μονάδες 7**

Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος ο δίσκος αρχίζει να κατέρχεται κυλιόμενος χωρίς να ολισθαίνει στο τεταρτοκύκλιο και στην συνέχεια κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο, το οποίο επίσης είναι ακλόνητο.

Δ4. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου, όταν φτάνει στην βάση του τεταρτοκυκλίου (θέση 2). **Μονάδες 4**

Δ5. Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών που έχει εκτελέσει ο δίσκος

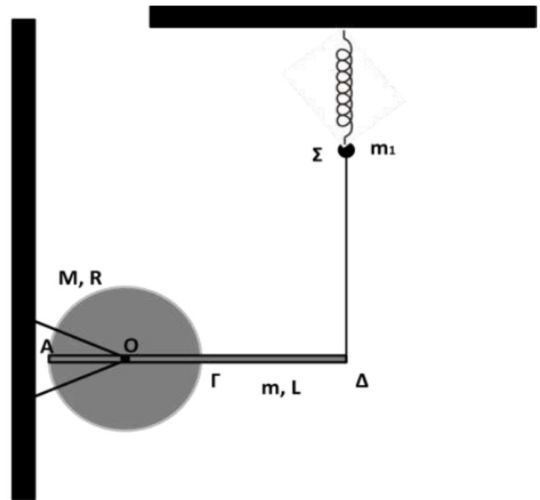
- 1) κατά την κύλισή του στο τεταρτοκύκλιο (Μονάδες 2)
- 2) κατά την κίνησή του στο λείο οριζόντιο δάπεδο όταν το κέντρο μάζας του έχει διανύσει διάστημα $s = \pi$ μέτρα (m) (θέση 3) (Μονάδες 2). **Μονάδες 4**

Δίνονται:

- $\eta\mu\phi = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,8$,
- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$,
- η ροπή αδράνειας του ομογενούς δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι ίση με $I_{cm(\delta\acute{\iota}\sigma\kappa\upsilon)} = \frac{1}{2}M_2r^2$,
- η ροπή αδράνειας της ομογενούς ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της και είναι κάθετος σε αυτή είναι ίση με $I_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta\omicron\upsilon} = \frac{1}{12}M_1L^2$,
- ο άξονας περιστροφής του ομογενούς δίσκου παραμένει συνεχώς οριζόντιος σε όλη την διάρκεια της κίνησής του,
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα,
- ο χαρακτηρισμός λεπτό νήμα αφορά νήμα αμελητέου πάχους,
- τα σχήματα δεν είναι υπό κλίμακα.

Στα θέματα των Εσπερινών: **Δ1** ίδιο, **Δ2** με **6 Μονάδες**, **Δ3** με ζητούμενο: το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου, όταν φτάνει στην βάση του τεταρτοκυκλίου (θέση 2) με **5 Μονάδες**, **Δ4** με ζητούμενο: η στροφορμή του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του, όταν φτάνει στην βάση του τεταρτοκυκλίου (θέση 2) με **5 Μονάδες**, **Δ5** ίδιο.

57. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια Επαναλ. 2020 (παλαιό)] Το στερεό του σχήματος 4 αποτελείται από λεπτό ομογενή δίσκο μάζας $M = 6 \text{ kg}$, ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ και λεπτή άκαμπτη ομογενή ράβδο (ΑΔ) μάζας $m = 3 \text{ kg}$, μήκους $L = 4R = 0,8 \text{ m}$. Η ράβδος είναι συγκολλημένη στον δίσκο κατά μήκος της διαμέτρου ΑΓ του δίσκου με το μέσον της στο σημείο Γ της περιφέρειας του δίσκου. Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο Ο του δίσκου και είναι κάθετο σε αυτόν. Αρχικά, το στερεό ισορροπεί με την βοήθεια του κατακόρυφου μη εκτατού νήματος, ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια. Το σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ του σχήματος είναι δεμένο στο κατακόρυφο νήμα αλλά και στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$, του οποίου το πάνω άκρο είναι στερεωμένο ακλόνητα. Αρχικά και το σώμα Σ ισορροπεί.



Σχήμα 4

Δ1. Κατά την αρχική ισορροπία των σωμάτων υπολογίστε την τάση του νήματος (μονάδες 2) και την δύναμη που δέχεται το στερεό από τον άξονα περιστροφής Ο (μονάδες 2).

Μονάδες 4

Δ2. Κόβουμε το νήμα. Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος υπολογίστε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Ο.

Μονάδες 6

Δ3. Το στερεό μετά το κόψιμο του νήματος στρέφεται χωρίς τριβές και άλλες αντιστάσεις σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το Ο. Υπολογίστε το μέτρο της στροφορμής του όταν θα έχει στραφεί κατά γωνία ϕ από την αρχική του θέση με $\eta\mu\phi = \frac{5}{6}$.

Μονάδες 5

Δ4. Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα Σ μάζας m_1 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στον κατακόρυφο άξονα. Να γραφεί η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ σε σχέση με τον χρόνο, θεωρώντας ως θετική την φορά προς τα επάνω και $t = 0$ την χρονική στιγμή που κόψαμε το νήμα.

Μονάδες 4

Δ5. Για την κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση του Σ, υπολογίστε την παραμόρφωση του ελατηρίου όταν για δεύτερη φορά το σώμα Σ έχει ταχύτητα μέτρου $u = 0,6 \text{ m/s}$.

Μονάδες 6

- Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$
- Οι ροπές αδράνειας ομογενούς δίσκου για άξονα που διέρχεται κάθετα από το κέντρο του $I_{\text{cm,δίσκου}} = \frac{1}{2}MR^2$ και λεπτής ομογενούς ράβδου για άξονα που διέρχεται κάθετα από το μέσο $I_{\text{cm,ράβδου}} = \frac{1}{12}ML^2$.
- Δίνεται ότι η όλη διάταξη βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, στο οποίο είναι κάθετος ο οριζόντιος άξονας.
- Για όλες τις κινήσεις θεωρούνται αμελητέες οι τριβές και οι αντιστάσεις.

58. [Ομογενείς 2020 (παλαιό)] Το στερεό του σχήμ. 4 αποτελείται από λεπτό ομογενή δίσκο μάζας $M = 6 \text{ kg}$, ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ και αβαρή λεπτή άκαμπτη ράβδο (ΟΔ) μήκους $L = 2R = 0,4 \text{ m}$. Η ράβδος είναι συγκολλημένη στον δίσκο κατά μήκος της ακτίνας ΟΓ του δίσκου με το μέσον της στο σημείο Γ της περιφέρειας του δίσκου. Επίσης από υλικό σημείο μάζας $m = 3 \text{ kg}$ στο σημείο Γ. Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο Ο του δίσκου και είναι κάθετο σε αυτόν. Αρχικά, το στερεό ισορροπεί με την βοήθεια του κατακόρυφου μη εκτατού νήματος, ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια. Το σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ του σχήματος είναι δεμένο στο κατακόρυφο νήμα αλλά και στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$, του οποίου το

πάνω άκρο είναι στερεωμένο ακλόνητα. Αρχικά και το σώμα Σ ισορροπεί.

Δ1. Κατά την αρχική ισορροπία των σωμάτων υπολογίστε την τάση του νήματος (μονάδες 3) και την δύναμη που δέχεται το στερεό από τον άξονα περιστροφής O (μονάδες 3).

Μονάδες 6

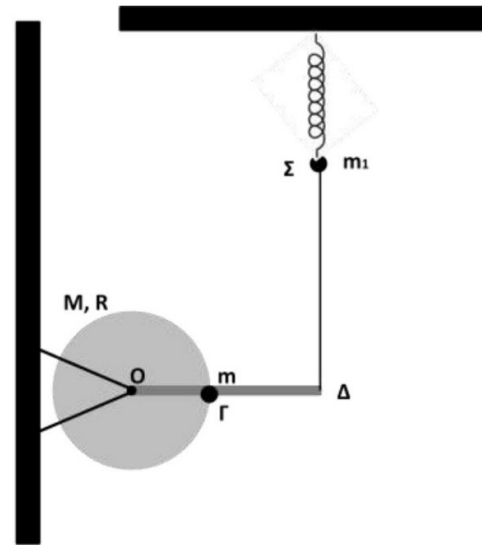
Δ2. Κόβουμε το νήμα. Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος υπολογίστε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το O.

Μονάδες 6

Δ3. Το στερεό μετά το κόψιμο του νήματος στρέφεται χωρίς τριβές και άλλες αντιστάσεις σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το O. Υπολογίστε το μέτρο της στροφορμής του όταν θα έχει στραφεί κατά γωνία $\phi = 90^\circ$ από την αρχική του θέση.

Μονάδες 6

Δ4. Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα Σ μάζας m_1 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στον κατακόρυφο άξονα. Να γραφεί η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ σε σχέση με τον χρόνο, θεωρώντας ως θετική την φορά προς τα επάνω και $t = 0$ την χρονική στιγμή που κόψαμε το νήμα.



Σχήμα 4

Μονάδες 7

- Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$
- Οι ροπές αδράνειας ομογενούς δίσκου για άξονα που διέρχεται κάθετα από το κέντρο του

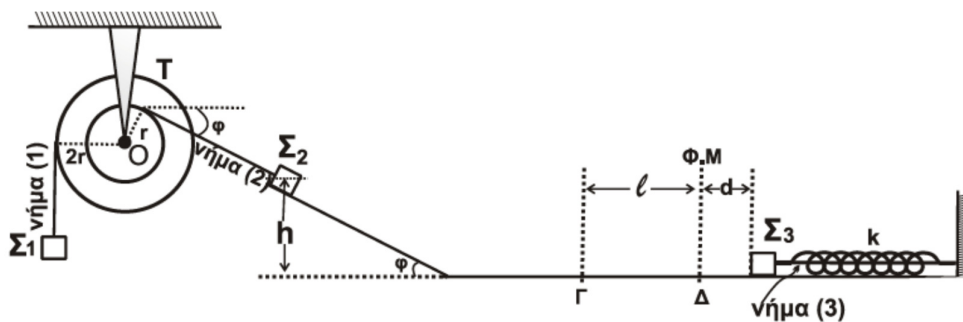
$$I_{\text{cm,δίσκου}} = \frac{1}{2}MR^2 \text{ και λεπτής ομογενούς ράβδου για άξονα που διέρχεται κάθετα από το μέσο}$$

$$I_{\text{cm,ράβδου}} = \frac{1}{12}ML^2.$$

- Δίνεται ότι η όλη διάταξη βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, στο οποίο είναι κάθετος ο οριζόντιος άξονας.
- Για όλες τις κινήσεις θεωρούνται αμελητέες οι τριβές και οι αντιστάσεις.

59. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια 2021] Η ομογενής τροχαλία T του σχήματος 5 μάζας $M = 1,5 \text{ kg}$, αποτελείται από

δύο κυκλικά τμήματα ακτίνας r και $2r$ αντίστοιχα, κολλημένα μεταξύ τους που στην περιφέρειά τους φέρουν λεπτή εγκοπή. Η τροχαλία T μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο ορι-



Σχήμα 5

ζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της O. Στο εξωτερικό κυκλικό τμήμα της τροχαλίας είναι τυλιγμένο λεπτό αβαρές νήμα (1), στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σώμα Σ_1 μάζας m_1 . Στο εσωτερικό κυκλικό τμήμα της τροχαλίας είναι τυλιγμένο λεπτό αβαρές νήμα (2), στο άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σώμα Σ_2 , μάζας $m_2 = 5 \text{ kg}$ που βρίσκεται σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ (ημ $\phi = 0,6$ και συν $\phi = 0,8$). Στην συνέχεια της βάσης του κεκλιμένου επιπέδου, βρίσκεται λείο οριζόντιο επίπεδο μεγάλου μήκους. Το σύστημα της τροχαλίας και των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ισορροπεί στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 5 \text{ kg}$ ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα Σ_3 είναι δεμένο με νήμα (3) με το ελατήριο συμπιεσμένο κατά $d = 0,2 \text{ m}$ από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Δ1. Να υπολογίσετε την μάζα m_1 και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η τροχαλία T από τον άξονα.

Μονάδες 7

Κόβουμε ταυτόχρονα τα νήματα (1) και (2) και απομακρύνουμε το σώμα Σ₁. Το σώμα Σ₂ που βρίσκεται σε ύψος $h = 1,8 \text{ m}$ από το οριζόντιο επίπεδο, αρχίζει να κατέρχεται στο κεκλιμένο επίπεδο και, αφού φτάσει στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου, συνεχίζει (χωρίς να παρατηρείται φαινόμενο αναπήδησης και χωρίς να μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητάς του) την κίνησή του στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Όταν το σώμα Σ₂ βρίσκεται στο σημείο Γ του οριζοντίου επιπέδου που απέχει απόσταση $\ell = \frac{3\pi}{5} \text{ m}$ από την θέση Δ στην οποία το

ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, κόβεται το νήμα (3) και το σώμα Σ₃ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$. Το σώμα Σ₃ συγκρούεται κεντρικά ελαστικά για πρώτη φορά με το σώμα Σ₂ στην θέση Δ φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Δ2. Να δείξετε ότι η σταθερά k του ελατηρίου είναι ίση με $125 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Μονάδες 5

Δ3. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο για την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ₃ αμέσως μετά την κρούση ($t = 0$ η στιγμή της κρούσης και θετική κατεύθυνση η κατεύθυνση της κίνησης του σώματος Σ₃ πριν την κρούση του με το σώμα Σ₂).

Μονάδες 4

Δ4. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος Σ₃, την χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια της ταλάντωσής του είναι οκταπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσής του, για πρώτη φορά μετά την κρούση με το σώμα Σ₂, καθώς και την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ₃ την ίδια χρονική στιγμή.

Μονάδες 6

Δ5. Να υπολογίσετε την απόσταση των σωμάτων Σ₂ και Σ₃ την χρονική στιγμή που το σώμα Σ₃ διέρχεται από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου για πρώτη φορά μετά την κρούση με το σώμα Σ₂.

Μονάδες 3

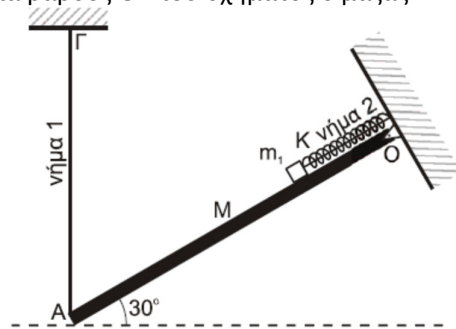
Δίνονται:

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$,
- η σταθερά π είναι περίπου ίση με 3,14.

Να θεωρήσετε ότι:

- η κρούση είναι ακαριαία,
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα,
- κατά την κρούση, δεν έχουμε απώλεια μάζας,
- ο χαρακτηρισμός «λεπτό νήμα» αφορά νήμα αμελητέου πάχους,
- τα σχήματα δεν είναι υπό κλίμακα,
- το οριζόντιο επίπεδο είναι μεγάλου μήκους και οι κινήσεις των σωμάτων, Σ₂ και Σ₃ για το ερώτημα Δ5 πραγματοποιούνται εξ ολοκλήρου στο οριζόντιο επίπεδο.

60. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια Επαναλ. 2021] Η ομογενής λεπτή, λεία ράβδος ΟΑ του σχήματος 6 μάζας $M = 8 \text{ kg}$ και μήκους $L = 2 \text{ m}$ είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα κάθετο στο επίπεδο του σχεδίου. Η ράβδος ισορροπεί δεμένη, στο άκρο της Α, από κατακόρυφο αβαρές, μη εκτατό νήμα 1 το επάνω άκρο του οποίου είναι ακλόνητα δεμένο στο Γ. Η ράβδος και το νήμα βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και η ράβδος σχηματίζει γωνία $\phi = 30^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση. Επάνω στην ράβδο ισορροπεί σώμα μάζας $m_1 = 4 \text{ kg}$, μικρών διαστάσεων, που είναι δεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k και σε αβαρές μη εκτατό νήμα 2 τα οποία είναι παράλληλα στην ράβδο και τα επάνω άκρα τους είναι ακλόνητα στερεωμένα (σχήμα 6). Στην θέση αυτή το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και το σώμα m_1 βρίσκεται στην θέση Δ, όπου $OD = 0,5 \text{ m}$.



Σχήμα 6

Δ1. Υπολογίστε την δύναμη που δέχεται η ράβδος από το νήμα 1 στο άκρο της Α.

Μονάδες 6

Δ2. Κάποια χρονική στιγμή κόβεται το νήμα 2 οπότε το σώμα m_1 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με σταθερά επαναφοράς $D = k$, επάνω στην λεία ράβδο με ολική ενέργεια $E = 2 \text{ J}$. Γράψτε την χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης της m_1 ως προς τον χρόνο. Θεωρήστε $t = 0$ την χρονική στιγμή που κόβεται το νήμα και θετική φορά από το A προς το O.

Μονάδες 7

Κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 δεύτερο μικρό σώμα μάζας $m_2 = m_1$ που εκτοξεύεται από το άκρο A της ράβδου, συγκρούεται κεντρικά ελαστικά (ακαριαία) με το σώμα μάζας m_1 , έχοντας ακριβώς πριν την κρούση με το σώμα μάζας m_1 , ταχύτητα μέτρου u_2 , παράλληλη στην ράβδο με φορά προς τα επάνω. Την στιγμή αυτή το σώμα m_1 έχει απομάκρυνση x_1 , όπου $x_1 < 0$ (το σώμα μάζας m_2 μετά την κρούση απομακρύνεται).

Δ3. Να βρεθεί η απομάκρυνση x_1 ώστε το σώμα m_1 αμέσως μετά την κρούση να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με το μέγιστο δυνατό πλάτος.

Μονάδες 6

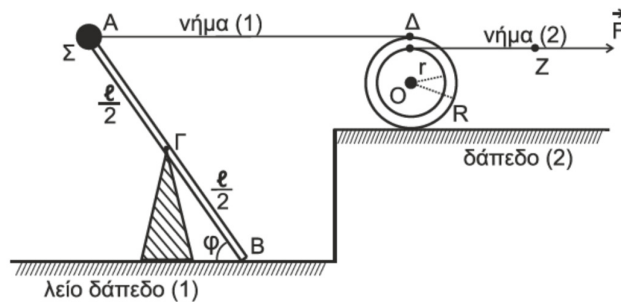
Δ4. Αν δίνεται πως το νέο πλάτος ταλάντωσης της σώματος μάζας m_1 ισούται με $0,4 \text{ m}$, υπολογίστε την ταχύτητα u_2 του σώματος μάζας m_2 .

Μονάδες 6

Η ράβδος παραμένει σε ισορροπία σε όλη την διάρκεια του φαινομένου και δίνονται:

$$\eta_{\mu 30^\circ} = \frac{1}{2}, \quad \text{συν}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και η επιτάχυνση της βαρύτητας } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

61. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια 2022] Λεπτή, άκαμπτη, ομογενής και ισοπαχής ράβδος AB μάζας $M_p = 3 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 2 \text{ m}$, φέρει στο άκρο της A σφαιρίδιο Σ μάζας $m = 1 \text{ kg}$, αμελητέων διαστάσεων, και ισορροπεί σε πλάγια θέση με την βοήθεια κατακόρυφου υποστηρίγματος, το οποίο έχουμε στερεώσει στο λείο οριζόντιο δάπεδο (1). Η ράβδος ακουμπά με το άκρο της B στο δάπεδο (1) σχηματίζοντας γωνία ϕ , όπου $\eta_{\mu \phi} = 0,8$ και $\text{συν}\phi = 0,6$. Η κορυφή του υποστηρίγματος συνδέεται με την ράβδο στο μέσον της Γ με άρθρωση και το σύστημα ράβδος-σφαιρίδιο μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Γ (κάθετα στο επίπεδο του σχήματος). Με την βοήθεια του οριζόντιου, αβαρούς και μη εκτατού νήματος (1) έχουμε συνδέσει το σφαιρίδιο Σ με το ανώτερο σημείο Δ ομογενούς τροχαλίας μάζας $M_t = 7 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,4 \text{ m}$. Η τροχαλία σε απόσταση $r = 0,3 \text{ m}$ από το κέντρο της O έχει ένα λεπτό κυκλικό αυλάκι στο οποίο έχουμε τυλίξει πολλές φορές αβαρές και μη εκτατό νήμα (2). Στο άκρο Z του νήματος (2) ασκούμε σταθερή δύναμη \vec{F} . Όλη η διάταξη ισορροπεί στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.



Σχήμα 6

Δ1. Αν το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα (1) στο σφαιρίδιο Σ είναι $10,5 \text{ N}$, να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος στο άκρο της B από το λείο δάπεδο (1).

Μονάδες 4

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κόβουμε το νήμα (1). Το σύστημα ράβδος – σφαιρίδιο Σ αρχίζει να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, χάνοντας την επαφή του με το δάπεδο (1).

Δ2. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος (1) και ενώ η ράβδος έχει χάσει την επαφή της με το λείο δάπεδο (1).

Μονάδες 6

Κατά την περιστροφή του συστήματος ράβδου–σφαιριδίου Σ , το σφαιρίδιο Σ χτυπά στο οριζόντιο δάπεδο. Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την κρούση έχει μέτρο $\frac{\omega}{2}$, όπου ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ακριβώς πριν την κρούση.

Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής $\Delta \vec{L}$ του συστήματος ράβδος – σφαιρίδιο Σ και να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\Delta \vec{L}$.

Μονάδες 5

Η τροχαλία, αμέσως μετά την χρονική στιγμή $t_0 = 0$, αρχίζει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο (2) με την επίδραση της δύναμης \vec{F} , το μέτρο της οποίας είναι 12 N. Ο άξονας περιστροφής της παραμένει συνεχώς οριζόντιος και κάθετος στο επίπεδο του σχήματος.

Δ4. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας της τροχαλίας.

Μονάδες 4

Δ5. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης \vec{F} από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως την χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.

Μονάδες 6

Δίνονται:

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$,
- η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτή: $I_{cm(\rho)} = \frac{1}{12} M_p \ell^2$

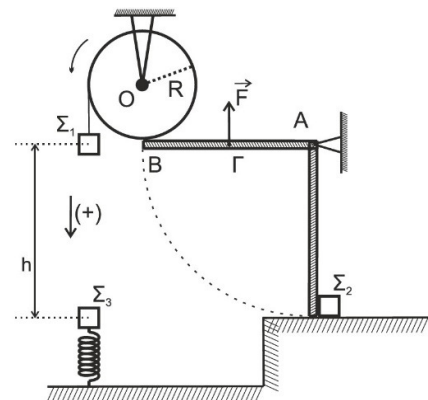
$$\text{αυτή: } I_{cm(\rho)} = \frac{1}{12} M_p \ell^2$$

- η ροπή αδράνειας τροχαλίας ως προς τον άξονά της: $I_{cm(T)} = \frac{1}{2} M_T R^2$

Να θεωρήσετε ότι:

- η κρούση είναι ακαριαία,
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα,
- κατά την κρούση, δεν έχουμε απώλεια μάζας,
- τα σχήματα δεν είναι υπό κλίμακα.

62. [Ημερ. & Εσπερ. Λύκεια Επαναλ. 2022] Άκαμπτη, ομογενής και ισοπαχής ράβδος AB, μήκους $\ell = 1,2$ m και μάζας $M_p = 2$ kg, έχει το άκρο της A αρθρωμένο και ισορροπεί οριζόντια. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A. Στο μέσον Γ της ράβδου ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη F με φορά προς τα επάνω, μέτρου $F = 80$ N. Η ράβδος AB εφάπτεται με το άκρο της B σε ομογενή τροχαλία, μάζας $M_T = 2$ kg και ακτίνας R, που είναι στερεωμένη σε οροφή και που μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της (**Σχήμα**). Αβαρές και μη εκτατό νήμα είναι τυλιγμένο πολλές φορές στο αυλάκι της τροχαλίας και στο ελεύθερο άκρο του είναι δεμένο σώμα Σ_1 , μικρών διαστάσεων και μάζας $m_1 = 1$ kg. Η τροχαλία με την επίδραση της τριβής που δέχεται από την ράβδο ισορροπεί οριακά.



Δ1. Να υπολογίσετε τον συντελεστή οριακής τριβής μεταξύ ράβδου και τροχαλίας.

Μονάδες 5

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$, καταργούμε την δύναμη F, με αποτέλεσμα η ράβδος να στραφεί γύρω από το άκρο της A και η τροχαλία να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Όταν η ράβδος φτάσει στην κατακόρυφη θέση, το άκρο της B συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα Σ_2 , μικρών διαστάσεων και μάζας $m_2 = 1$ kg.

Δ2. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 6

Κάτω από το σώμα Σ_1 και σε απόσταση $h = 1,2$ m βρίσκεται σώμα Σ_3 , μάζας $m_3 = 3$ kg, το οποίο ισορροπεί στο άνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100$ N/m, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη στο έδαφος. Την χρονική στιγμή t_1 , το σώμα Σ_1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ_3 και ταυτόχρονα κόβεται το νήμα. Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 , την χρονική στιγμή t_1 που συναντά το σώμα Σ_3 .

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Μονάδες 5

Δ5. Να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος.

Μονάδες 4

Θεωρήστε χρονική στιγμή $t = 0$ την στιγμή της κρούσης και θετική φορά την προς τα κάτω.

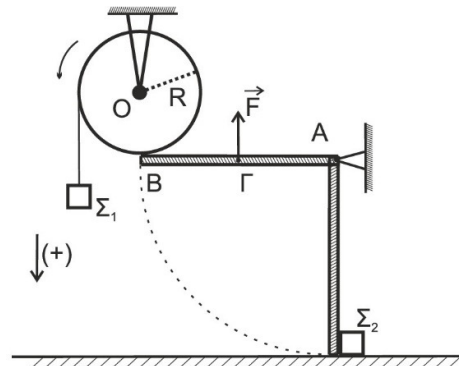
Δίνονται:

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της A $I_{(A)} = \frac{1}{3} M_p \ell^2$
- η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της $I_{cm(T)} = \frac{1}{2} M_T R^2$

Να θεωρήσετε ότι:

- οι κρούσεις είναι ακαριαίες και κατά την πραγματοποίησή τους δεν έχουμε απώλεια μάζας.
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα.
- το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.
- το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα.

63. [Ομογενείς 2022] Άκαμπτη, ομογενής και ισοπαχής ράβδος AB, μήκους $\ell = 1,2 \text{ m}$ και μάζας $M_p = 2 \text{ kg}$, έχει το άκρο της A αρθρωμένο και ισορροπεί οριζόντια. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A. Στο μέσον Γ της ράβδου ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη F με φορά προς τα επάνω, μέτρου $F = 80 \text{ N}$. Η ράβδος AB εφάπτεται με το άκρο της B σε ομογενή τροχαλία, μάζας $M_T = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας R, που είναι στερεωμένη σε οροφή και που μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της (**Σχήμα**). Αβαρές και μη εκτατό νήμα είναι τυλιγμένο πολλές φορές στο αυλάκι της τροχαλίας και στο ελεύθερο άκρο του είναι δεμένο σώμα Σ_1 , μικρών διαστάσεων και μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$. Η τροχαλία με την επίδραση της τριβής που δέχεται από την ράβδο ισορροπεί οριακά.



Δ1 . Να υπολογίσετε το μέτρο της κάθετης δύναμης N που ασκεί η τροχαλία στο άκρο B της ράβδου.

Μονάδες 6

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$, καταργούμε την δύναμη F, με αποτέλεσμα η ράβδος να στραφεί γύρω από το άκρο της A και η τροχαλία να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Όταν η ράβδος φτάσει στην κατακόρυφη θέση, το άκρο της B συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα Σ_2 , μικρών διαστάσεων και μάζας $m_2 = 1 \text{ kg}$.

Δ2 . Να υπολογίσετε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ακριβώς πριν από την κρούση.

Μονάδες 6

Δ3 . Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 6

Δ4 . Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ_1

Μονάδες 7

Δίνονται:

- η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της A $I_{(A)} = \frac{1}{3} M_p \ell^2$
- η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της $I_{cm(T)} = \frac{1}{2} M_T R^2$

Να θεωρήσετε ότι:

- η κρούση είναι ακαριαία και κατά την πραγματοποίησή της δεν έχουμε απώλεια μάζας.
- η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα για όλα τα σώματα.
- το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.
- το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα.