ΦΥΣΙΚΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1 : ΔΥΝΑΜΗ και ΚΙΝΗΣΗ

1.2 Δυναμική σε μία διάσταση
1.3 Δυναμική στο επίπεδο

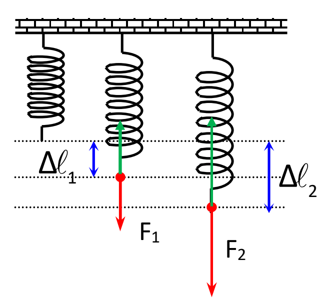
ΘΕΩΡΙΑ

1. Δύναμη

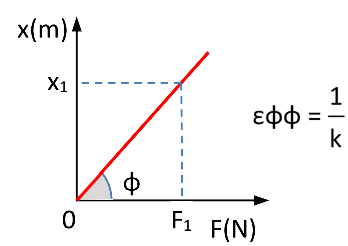
Α. Έννοια: Δύναμη (F) είναι η αιτία για τις επιταχύνσεις και τις παραμορφώσεις που προκαλούνται στα σώματα.
Μονάδα δύναμης είναι το 1 N (Newton).

Β. Ο διανυσματικός χαρακτήρας της δύναμης: Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος άρα για την περιγραφή της χρειάζονται τρία στοιχεία, το σημείο εφαρμογής (το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη), το μέτρο και η κατεύθυνση (ευθεία ενέργειας και φορά).

Γ. Μέτρηση της δύναμης: Η μέτρηση της δύναμης γίνεται συνήθως με το δυναμόμετρο η λειτουργία του οποίου στηρίζεται στον νόμο των ελαστικών παραμορφώσεων του Hooke.



Δ. Νόμος των ελαστικών παραμορφώσεων του Hooke: «οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι ανάλογες προς τις αιτίες που τις προκαλούν». Αν το σώμα που παραμορφώνεται είναι ένα ελατήριο σκληρότητας k, τότε ισχύει $F = k\Delta\ell$ όπου F η δύναμη και $\Delta\ell$ η παραμόρφωση (μεταβολή του μήκους) του ελατήριου. Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα δίνεται από την σχέση $F_{ελ} = -k\Delta\ell$. Το "-" δηλώνει ότι η παραμόρφωση είναι στην αντίθετη κατεύθυνση από την δύναμη που ασκεί το ελατήριο. Επομένως το ελατήριο ασκεί δύναμη προσπαθώντας να επανέλθει στην θέση φυσικού μήκους. Αν με την επίδραση της δύναμης F_1 το ελατήριο παραμορφώνεται κατά $\Delta\ell_1$ και με την επίδραση της δύναμης F_2 το ελατήριο παραμορφώνεται κατά $\Delta\ell_2$, τότε για τις δυνάμεις ισχύει $\frac{F_1}{F_2}=\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2}$. Αν μετρήσουμε τις παραμορφώσεις και ξέρουμε την μία δύναμη, μπορούμε να υπολογίσουμε την άλλη.



Αν κατασκευάσουμε το διάγραμμα παραμόρφωσης $\Delta\ell = x$ σε συνάρτηση με την δύναμη F που ασκείται στο ελατήριο θα έχουμε το διπλανό διάγραμμα. Από την κλίση του διαγράμματος μπορούμε να υπολογίσουμε την σκληρότητα k του ελατηρίου. Για το k ισχύει $k = \frac{F}{\Delta\ell}$ και στο S.I. η μονάδα μέτρησης είναι το 1 N/m.

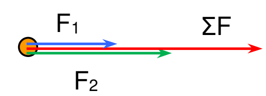
2. Συνισταμένη δυνάμεων

Σύνθεση δύο δυνάμεων:

Αν σε ένα σημείο ασκούνται δύο ή περισσότερες δυνάμεις μπορούν να αντικατασταθούν από μια δύναμη που προκαλεί τα ίδια αποτελέσματα με αυτές. Η δύναμη αυτή λέγεται συνιστάμενη και η εργασία για την εύρεση της, σύνθεση των δυο δυνάμεων. Γενικά γράφουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Α. Δυνάμεις με ίδια κατεύθυνση (Συγγραμμικές και ομόρροπες):

Η συνιστάμενη έχει την ίδια κατεύθυνση με τις δυνάμεις και μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους, άρα $\Sigma F = F_1 + F_2$.



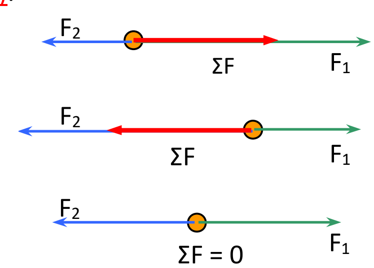
Β. Δυνάμεις με αντίθετες κατευθύνσεις (Συγγραμμικές και αντίρροπες):

Η συνιστάμενη τους έχει την κατεύθυνση της μεγαλύτερης δύναμης και μέτρο ίσο με την απόλυτη διαφορά των μέτρων τους, άρα $\Sigma F = |F_1 - F_2|$.

α. Αν $F_1 > F_2$ τότε $\Sigma F \uparrow\uparrow F_1$

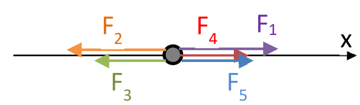
β. Αν $F_2 > F_1$ τότε $\Sigma F \uparrow\uparrow F_2$

γ. Αν $F_1 = F_2$ τότε $\Sigma F = 0$ (αντίθετες δυνάμεις)



Γ. Πολλές συγγραμμικές δυνάμεις:

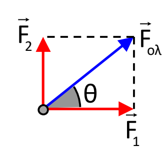
Αν σε ένα σώμα ασκούνται πολλές συγγραμμικές δυνάμεις, τότε ορίζουμε αυθαίρετα θετική φορά και προσθέτουμε τις δυνάμεις αλγεβρικά. Αν το αποτέλεσμα είναι θετικό, τότε η συνισταμένη έχει φορά προς τα θετικά, ενώ αν το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, τότε η συνισταμένη έχει κατεύθυνση προς τα αρνητικά. Π.χ. για τις δυνάμεις του διπλανού σχήματος είναι:



$\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5$ άρα $F_{ολ} = F_1 - F_2 - F_3 + F_4 + F_5$.

Δ. Κάθετες δυνάμεις:

Η συνιστάμενη δυο κάθετων δυνάμεων F_1 και F_2 προσδιορίζεται με την μέθοδο του παραλληλόγραμμου όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέτρο της συνιστάμενης και η γωνία θ που σχηματίζει η συνιστάμενη με την δύναμη F_1 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

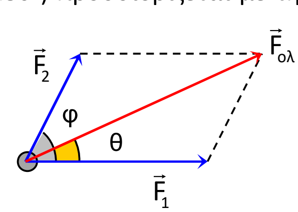


$$F_{ολ}^2 = F_1^2 + F_2^2 \quad ή \quad F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$εφθ = \frac{F_2}{F_1} \quad (ή \;\; ημθ = \frac{F_2}{F_{ολ}}).$$

Ε. Σύνθεση δύο συντρεχουσών δυνάμεων:

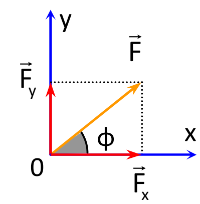
Η συνιστάμενη δυο δυνάμεων F_1 και F_2 που σχηματίζουν γωνία φ ($0^0 < φ < 180^0$) προσδιορίζεται με την μέθοδο του παραλληλόγραμμου όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέτρο της συνιστάμενης και η γωνία θ που σχηματίζει η συνιστάμενη με την δύναμη F_1 υπολογίζονται από τις σχέσεις:



$$F_{ολ}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2συνφ \quad ή \quad F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2συνφ}$$

$$εφθ = \frac{F_2ημφ}{F_1 + F_2συνφ} \quad (ή \;\; ημθ = \frac{F_2ημφ}{F_{ολ}}).$$

3. Ανάλυση δύναμης σε δύο κάθετες συνιστώσες



Σε τυχαίο ορθογώνιο σύστημα αξόνων η δύναμη F σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x. Αυτή με την μέθοδο των προβολών αναλύεται σε δυο συνιστώσες τις F_x και F_y. Για τις συνιστώσες ισχύει:

$$\text{συνφ} = \frac{F_x}{F} \quad \text{άρα} \quad F_x = F\text{συνφ}$$

$$\text{ημφ} = \frac{F_y}{F} \quad \text{άρα} \quad F_y = F\text{ημφ}$$

4. 1ος νόμος Newton

Α. Αδράνεια: Είναι η ιδιότητα των υλικών σωμάτων να διατηρούν την κινητική τους κατάσταση σταθερή και να αντιστέκονται σε κάθε μεταβολή της.

Β. 1ος νόμος Newton: «Κάθε σώμα διατηρεί την κατάσταση ακινησίας ή ευθύγραμμης ομαλής κίνησης εφόσον δεν ασκείται σε αυτό δύναμη».

παρατήρηση:

Ο νόμος αυτός εισάγει μια ισοδυναμία ανάμεσα στην κατάσταση «ακινησίας» και «ευθύγραμμης ομαλής κίνησης». Δηλαδή τα συστήματα σταθερής ταχύτητας είναι ισοδύναμα. Η τιμή της σταθερής ταχύτητας $υ = 0$ ή $υ \neq 0$ εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς.

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{υ} = 0 \ \text{(ακίνητο σώμα - στατική ισορροπία)} \\ \text{ή} \\ \vec{υ} = \text{σταθερό} \neq 0 \ \text{(ΕΟΚ - δυναμική ισορροπία)} \end{cases}$$

Γ. Ισορροπία: Όταν ένα υλικό σημείο ισορροπεί η συνιστάμενη όλων των δυνάμεων F_1, F_2.....$F_ν$ που ασκούνται σε αυτό είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή $\vec{F}_{ολ} = \Sigma\vec{F}_ν = 0$.

Για συγγραμμικές δυνάμεις: Αν με ΣF συμβολίσουμε το άθροισμα των αλγεβρικών τιμών των συνιστωσών όλων των δυνάμεων στον άξονα τότε μπορούμε να γράψουμε :

$$\Sigma\vec{F} = 0 \ \text{ή} \ \Sigma F = 0$$

Αυτή είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ισορροπία συγγραμμικών δυνάμεων.

5. 2ος νόμος Newton

Α. Επιτάχυνση και δύναμη: Αν ασκήσουμε δύναμη σε ένα σώμα αυτό αποκτά επιτάχυνση και μάλιστα η επιτάχυνση είναι ανάλογη με την δύναμη και έχει την ίδια διεύθυνση με αυτήν. Μπορούμε επομένως να γράψουμε την σχέση: $\vec{α} = \frac{1}{m}\vec{F}$. Ο συντελεστής αναλογίας m ονομάζεται μάζα αδράνειας του σώματος ή απλά μάζα.

Β. Αδράνεια και μάζα: Ο λόγος των μαζών δυο σωμάτων είναι ίσος με το αντίστροφο του λόγου των επιταχύνσεων που θα αποκτήσουν με την επίδραση μιας κοινής δύναμης. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$\frac{m_1}{m_2}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Αν το ένα από τα δυο σώματα είναι ένα πρότυπο μάζας (πχ το πρότυπο kg) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την μάζα του αλλού σώματος.

Γ. Θεμελιώδης νόμος της δυναμικής ή 2^{ος} νόμος Newton (απλοποιημένη μορφή αν m = σταθερή):

Για οποιοδήποτε σώμα μάζας m στο οποίο ασκείται δύναμη $\vec{F}$ προσδίδεται επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ με την κατεύθυνση της δύναμης και ισχύει :

$$\vec{\alpha}=\frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F}=m\vec{\alpha}$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να ορίσουμε την μονάδα δύναμης 1 N: 1 N = 1 kg·m/s^2.
«1N (Newton) είναι η δύναμη η οποία ασκούμενη σε σώμα μάζας 1 kg προκαλεί επιτάχυνση 1 m/s^2 ».

παρατήρηση :

Στην σχέση $\vec{F}=m\cdot\vec{\alpha}$ το σύμβολο $\vec{F}$ παριστάνει την συνιστάμενη όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

Δ. Διερεύνηση της σχέσης $\vec{F}=m\vec{\alpha}$

- Αν η ολική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα είναι μηδέν

Από την σχέση $\vec{F}=m\vec{\alpha}$ συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι μηδέν άρα το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα. (Αν το σώμα αρχικά ήταν ακίνητο θα συνεχίσει να είναι ακίνητο ή αν το σώμα αρχικά είχε ταχύτητα θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση).

- Αν η ολική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα είναι σταθερή με $\vec{F}//\vec{\upsilon}_0$

Από την σχέση $\vec{F}=m\vec{\alpha}$ συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι σταθερή άρα το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

- Αν η ολική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα δεν είναι σταθερή

Από την σχέση $\vec{F}=m\vec{\alpha}$ συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ δεν είναι σταθερή άρα το σώμα κάνει επιταχυνόμενη κίνηση.

Ε. Το βάρος και η μάζα: Βάρος (w) ενός σώματος λέγεται η ελκτική δύναμη που ασκεί η Γη στο σώμα. Αν στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος τότε αυτό αποκτά επιτάχυνση g (επιτάχυνση της βαρύτητας). Αν εφαρμόσουμε τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής έχουμε: w = m·g. Για δύο σώματα ισχύει $\frac{m_2}{m_1}=\frac{w_2}{w_1}$. Άρα μπορούμε να μετρήσουμε την μάζα ενός σώματος (δηλ. τον λόγο της ως προς μία άλλη που είναι η μονάδα μέτρησης) από τον λόγο των δύο βαρών.

Η μάζα ενός σώματος είναι σταθερή, ενώ το βάρος μεταβάλλεται από τόπο σε τόπο. Η μάζα που προκύπτει από την μέτρηση της δύναμης του βάρους ονομάζεται βαρυτική μάζα. Η βαρυτική μάζα και η μάζα αδράνειας πρακτικά ταυτίζονται (όταν οι ταχύτητες είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός στο κενό).

6. Ο 2^{ος} νόμος του Newton στο επίπεδο

Για οποιοδήποτε σώμα μάζας m στο οποίο ασκείται δύναμη $\vec{F}$ προσδίδεται επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ με την κατεύθυνση της δύναμης και ισχύει:

$$\vec{\alpha}=\frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F}=m\vec{\alpha}$$

Αν σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες της δύναμης είναι F_x και F_y και της επιτάχυνσης α_x και α_y τότε η διανυσματική εξίσωση $\vec{F} = m\vec{\alpha}$ είναι ισοδύναμη με τις αλγεβρικές εξισώσεις $F_x = m\cdot\alpha_x$ και $F_y = m\cdot\alpha_y$.

7. Αλληλεπίδραση σωμάτων – Δυνάμεις

Α. Σύστημα σωμάτων:

Ονομάζεται μία ομάδα σωμάτων, που τα μελετάμε σαν ένα σώμα. Κάθε σώμα που δεν ανήκει στο σύστημα λέμε ότι ανήκει στο εξωτερικό περιβάλλον του συστήματος.

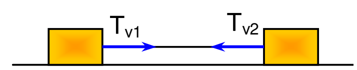
Οι δυνάμεις που ασκούνται από σώματα του συστήματος σε άλλα σώματα του ίδιου συστήματος ονομάζονται εσωτερικές δυνάμεις, ενώ οι δυνάμεις που ασκούνται από σώματα έξω από το σύστημα σε σώματα του συστήματος ονομάζονται εξωτερικές δυνάμεις.

Β. Δυνάμεις επαφής και δυνάμεις από απόσταση:

Οι δυνάμεις διακρίνονται σε δυνάμεις επαφής (δύναμη από νήμα, δύναμη στήριξης, τριβή, δύναμη ελατηρίου, άνωση ....) και σε δυνάμεις από απόσταση ή δυνάμεις από πεδίο [που είναι τέσσερις: βαρύτητα, ηλεκτρομαγνητική δύναμη (ηλεκτρική και μαγνητική δύναμη), ασθενής πυρηνική (υπεύθυνη για την διάσπαση β), ισχυρή πυρηνική (υπεύθυνη για την συγκράτηση των συστατικών του πυρήνα)].

Δύναμη στήριξης: Είναι μία δύναμη επαφής που εμφανίζεται όταν δύο σώματα είναι σε επαφή άρα αλληλοσυμπιέζονται. Είναι κάθετη στην κοινή επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων, παριστάνεται με ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στην κοινή επιφάνεια με κατεύθυνση προς το μέρος του σώματος στο οποίο ασκείται. Ονομάζεται και κάθετη αντίδραση ($\vec{F}_k$ ή $\vec{N}$).

Δύναμη από νήμα: Είναι δύναμη επαφής που ασκείται στα σώματα που είναι δεμένα στα δύο άκρα τεντωμένου νήματος και έχει κατεύθυνση από το σώμα προς το νήμα. Οι δυνάμεις T_{v1} και T_{v2} έχουν ίσα μέτρα για ιδανικό νήμα (αβαρές και μη εκτατό).

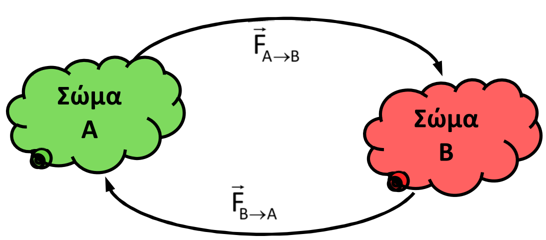


Γ. Ο 3ος νόμος του Newton:

Αναφέρεται σε δύο σώματα που αλληλεπιδρούν, δηλαδή ασκούν το ένα στο άλλο δυνάμεις. Η διατύπωσή του είναι : «Η αλληλεπίδραση ανάμεσα σε δύο σώματα Α και Β μπορεί να περιγράφεται με δύο δυνάμεις $\vec{F}_{AB}$ και $\vec{F}_{BA}$ τέτοιες ώστε σε κάθε χρονική στιγμή να ισχύει $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ ».

Η μια δύναμη λέγεται δράση και η άλλη αντίδραση.

Μια ισοδύναμη διατύπωση του νόμου είναι: «Σε μια δράση αντιτίθεται πάντα μια ίση αντίδραση».



$$\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B}$$

παρατήρηση :

- Οι δυνάμεις δράση και αντίδραση μολονότι είναι αντίθετες δεν έχουν μηδενική συνισταμένη γιατί ασκούνται σε διαφορετικά σώματα.
- Αν έχω σύστημα σωμάτων τότε όλες οι εσωτερικές δυνάμεις είναι ζεύγη δράση – αντίδραση, άρα για το σύστημα σαν σύνολο και μόνο τότε δεν λαμβάνονται υπ’ όψη.

8. Ελεύθερη πτώση

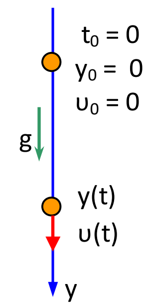
Α. Ορισμός:

Ελεύθερη πτώση λέγεται η κίνηση που κάνει ένα σώμα όταν σε αυτό ασκείται μόνο το βάρος του. Το βάρος του σώματος θεωρείται σταθερό και οι αντιστάσεις του αέρα μηδενικές.

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με φορά προς τα κάτω.

Η επιτάχυνση είναι σταθερή αλλά διαφορετική για κάθε τόπο και ονομάζεται επιτάχυνση της βαρύτητας g. Για την επιφάνεια της θάλασσας και σε Γεωγραφικό Πλάτος 45^0 είναι $g = 9{,}81\ m/s^2$.

Β. Εξισώσεις και διαγράμματα:



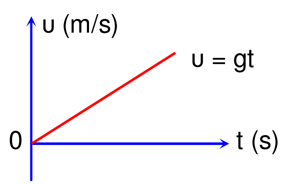
Οι εξισώσεις της προκύπτουν από τις εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης στον άξονα y, αν θεωρήσουμε την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχική ταχύτητα $υ_0 = 0$ στην θέση $y_0 = 0$ και αν αντικαταστήσουμε την επιτάχυνση α με την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Άρα

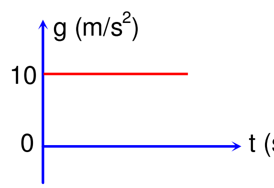
$α = g$ (Συνήθως δίνεται $g = 10\ m/s^2$)

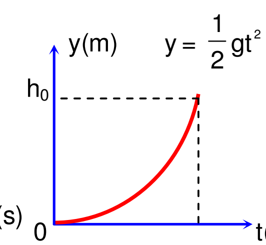
$υ = g{\cdot}t$

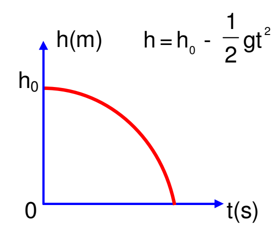
$y = \frac{1}{2}{\cdot}g{\cdot}t^2$

Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις είναι :









Αν θεωρήσουμε ότι το σώμα αρχικά βρίσκεται σε ύψος h_0 από το έδαφος, τότε την κάθε χρονική στιγμή η απόστασή του από το έδαφος δίνεται από την σχέση: $h = h_0 - y$ άρα $h = h_0 - \frac{1}{2}{\cdot}g{\cdot}t^2$. Η γραφική παράσταση αυτής της σχέσης είναι στο παραπάνω σχήμα.

9. Τριβή

Τριβή είναι μια δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση ή στην τάση για κίνηση ενός σώματος όταν αυτό βρίσκεται σε επαφή με ένα άλλο σώμα και συνυπάρχει πάντα με την δύναμη στήριξης. Εμφανίζεται σαν στατική τριβή ή σαν τριβή ολίσθησης. Είναι παράλληλη στην επιφάνεια επαφής με φορά αντίθετη από την φορά κίνησης του σώματος. Η τριβή οφείλεται στις ανωμαλίες που παρουσιάζουν οι επιφάνειες των δύο σωμάτων που έρχονται σε επαφή.

Α. Στατική τριβή – Οριακή τριβή:

Στατική τριβή $T_σ$: Εμφανίζεται στις επιφάνειες δυο σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή, βρίσκονται σε σχετική ισορροπία και το ένα τείνει να κινηθεί ως προς το άλλο. Δεν έχει σταθερό μέτρο αλλά είναι διαρκώς αντίθετη με την δύναμη που τείνει να κινήσει το σώμα.

Οριακή τριβή T_{op}: Η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής ονομάζεται οριακή τριβή T_{op} και ισχύει $T_{op} = T_{σ,max}$.
Ισχύει: $T_{op} = μ_{op}N$ όπου $μ_{op}$ ο συντελεστής οριακής τριβής και N η κάθετη αντίδραση που δέχεται το σώμα.
Είναι πάντα $0 \le T_σ \le T_{op}$ ή $0 \le T_σ \le μ_{op}N$.

Β. Τριβή ολίσθησης:

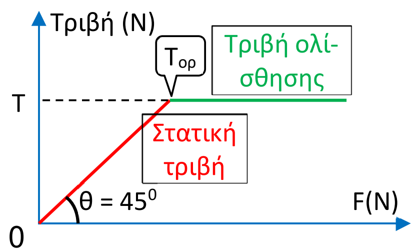
Εμφανίζεται στις επιφάνειες δυο αντικειμένων που βρίσκονται σε επαφή, ενώ τα σώματα βρίσκονται σε σχετική κίνηση. Έχει σταθερό μέτρο που δίνεται από την σχέση $T = \mu \cdot N$ όπου μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης και Ν η κάθετη αντίδραση που δέχεται το σώμα.

Νόμος της τριβής ολίσθησης: «Η Τριβή ολίσθησης:

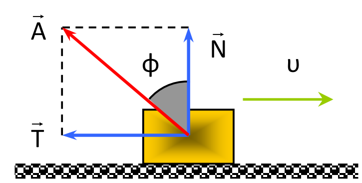
❶ Είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν συνεπαφής.
❷ Είναι ανεξάρτητη από την σχετική ταχύτητα των δυο σωμάτων.
❸ Εξαρτάται από την φύση των επιφανειών επαφής που τρίβονται
❹ Είναι ανάλογη με το μέτρο της δύναμης που πιέζει κάθετα τις επιφάνειες που τρίβονται»

Όλα αυτά εκφράζονται με την σχέση $T = \mu \cdot N$ (ή $T = \mu \cdot F_\kappa$) όπου Τ η τριβή ολίσθησης, μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης που εξαρτάται από την φύση των επιφανειών επαφής και Ν (ή F_κ) η κάθετη αντίδραση.
Για κάθε δυάδα επιφανειών σε επαφή είναι $\mu_{ορ} > \mu$ ή $\mu_{ορ}N > \mu \cdot N$ άρα $T_{ορ} > T$. Συνήθως δίνεται $\mu = \mu_{ορ}$!

Γ. Διάγραμμα τριβής σε συνάρτηση με την συνισταμένη εξωτερική δύναμη στο σώμα:

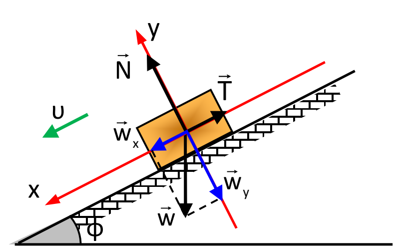


παρατήρηση:



Όταν ένα σώμα ολισθαίνει πάνω σε επίπεδο, το επίπεδο του ασκεί την τριβή Τ και την κάθετη αντίδραση Ν. Άρα το επίπεδο ασκεί στο σώμα την δύναμη Α που σχηματίζει γωνία φ με την κάθετη στο επίπεδο. Η δύναμη Α ονομάζεται **αντίδραση του δαπέδου** και αναλύεται στις δύο συνιστώσες: στον άξονα x την οριζόντια αντίδραση ή τριβή Τ και στον άξονα y στην κάθετη αντίδραση Ν. Για την γωνία φ ισχύει $εφφ = \frac{T}{N} = \mu$.

Δ. Υπολογισμός συντελεστή οριακής τριβής:



Θεωρούμε ένα σώμα το οποίο κινείται κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου, προς τα κάτω με σταθερή ταχύτητα. Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος w, η αντίδραση Ν από το δάπεδο και η δύναμη τριβής Τ. Εκλέγουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων από τους οποίους ο ένας είναι παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο και αναλύουμε τις δυνάμεις στο σύστημα αυτό. Η δύναμη του βάρους σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Οy άρα $w_x = w \cdot ημφ$ και $w_y = w \cdot συνφ$.

Για τον άξονα Οy έχουμε: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w_y = 0 \Rightarrow N = m \cdot g \cdot συνφ$

Για τον άξονα Οx έχουμε: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_x - T = 0 \Rightarrow T = m \cdot g \cdot ημφ$

Από τον νόμο της τριβής έχουμε: $T = \mu \cdot N$ άρα $m \cdot g \cdot ημφ = \mu \cdot m \cdot g \cdot συνφ$ άρα $ημφ = \mu \cdot συνφ$ ή $\mu = \frac{ημφ}{συνφ}$ άρα $\mu = εφφ$

Επομένως ο συντελεστής τριβής ολίσθησης σώματος – επιπέδου είναι ίσος με την κλίση του επιπέδου για την οποία το σώμα κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα.

Ερωτήσεις Αξιολόγησης στο Κεφ 1.2

Ερωτήσεις σύντομης απάντησης

1. Μια δύναμη ασκείται πάνω σε ένα σώμα. Να περιγράψετε τις πιθανές μεταβολές που μπορούν να συμβούν στο σώμα και να αναφέρετε ένα φαινόμενο για κάθε περίπτωση.

2. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ της ελαστικής και της πλαστικής παραμόρφωσης.

3. Ένα αυτοκίνητο κινείται πάνω σε ευθεία με σταθερή ταχύτητα ίση με 30 m/s. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται στο αυτοκίνητο. Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

4. Ένα διαστημόπλοιο κινείται στο διάστημα με σταθερή ταχύτητα. Πόση είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Να εξηγήσετε την κίνηση των επιβατών ενός αυτοκινήτου όταν αυτό φρενάρει.

6. Δύο δυνάμεις ασκούνται σε ακίνητο σώμα με μάζα 10 kg. Η μία δύναμη είναι 5 N προς τα αριστερά και η άλλη 25 N προς τα δεξιά.
α. Πόση είναι η επιτάχυνση του αντικείμενου
β. Πόσο θα μετακινηθεί το αντικείμενο σε χρόνο 10 s.

7. Δύο πλανήτες έχουν την ίδια μάζα αλλά διαφορετική ακτίνα. Σε ποιόν από τους δύο η επιτάχυνση στην επιφάνεια είναι μεγαλύτερη. Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.
α. Σε αυτόν με την μικρότερη ακτίνα **β.** Σε αυτόν με την μεγαλύτερη ακτίνα

8. Αν μεταφέρουμε ένα σώμα από την επιφάνεια της Γης σε ύψος 500 km, τότε:
α. Θα μεταβληθεί η μάζα του **β.** Θα μεταβληθεί το βάρος του **γ.** Θα μεταβληθούν και τα δύο
Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

9. Το βάρος ενός ανθρώπου είναι 750 N. Ποια δύναμη ασκεί ο άνθρωπος στην Γη. Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

10. Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στην τριβή ολίσθησης και την στατική τριβή σχετικά με το πότε εμφανίζεται η κάθε μία.

11. Ένας σκιέρ κατεβαίνει την πλαγιά ενός λόφου. Πότε η τριβή ολίσθησης είναι μεγαλύτερη; όταν η ταχύτητα του είναι μικρή ή όταν είναι μεγάλη. Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις βάλτε σε κύκλο την σωστή απάντηση.

12. Δύο δυνάμεις 6 N και 2 N ασκούνται στο ίδιο σώμα. Πόση είναι η συνισταμένη δύναμη.
α. 8 N **β.** 4 N **γ.** 12 N **δ.** τα στοιχεία δεν επαρκούν για απάντηση

13. Η αδρανειακή μάζα ορίζεται από:
α. Τον νόμο της αδράνειας **β.** Τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής
γ. Την ποσότητα της ύλης ενός σώματος **δ.** Την μέτρηση του βάρους του σώματος

Λυμένα παραδείγματα στα Κεφ 1.2 και 1.3

Μεθοδολογία

Α. Βασικές δυνάμεις:

- Σε όλα τα σώματα ασκούνται οι δυνάμεις επαφής και οι πεδιακές δυνάμεις όπως βάρος, δύναμη Coulomb κλπ.
- Το τεντωμένο νήμα ασκεί ίσες κατά μέτρο δυνάμεις στα σώματα που έχει δεθεί.
- Η σταθερή τροχαλία αλλάζει την διεύθυνση μιας δύναμης χωρίς να αλλάζει το μέτρο της.

Β. Σύνθεση δυνάμεων:

- Για δυο δυνάμεις που σχηματίζουν γωνία χρησιμοποιούμε το παραλληλόγραμμο και τις σχέσεις:

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2\cdot F_1\cdot F_2\cdot συνφ} \text{ και } εφθ=\frac{F_2\cdot ημφ}{F_1+F_2\cdot συνφ} \text{ ή } ημθ=\frac{F_2\cdot ημφ}{F}$$

- Για πολλές δυνάμεις:
  ❶ Εκλέγουμε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων,
  ❷ Αναλύουμε τις δυνάμεις στους άξονες
  ❸ Βρίσκουμε τα $ΣF_x$ και $ΣF_y$
  ❹ Η συνιστάμενη δίνεται από τις $F=\sqrt{(ΣF_x)^2+(ΣF_y)^2}$ και $εφθ=\frac{ΣF_y}{ΣF_x}$

Γ. Ισορροπία υλικού σημείου:

Οι συνθήκες είναι $ΣF_x = 0$ και $ΣF_y = 0$

Δ. Ισορροπία στερεού σώματος:

Αν ένα στερεό σώμα με διαστάσεις ισορροπεί και σε αυτό ασκούνται τρεις δυνάμεις, τότε οι δυνάμεις αυτές διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Ε. Κινούμενο σώμα:

- Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούντα στο σώμα.
- Εκλέγουμε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων που ο ένας έχει την διεύθυνση της κίνησης και αναλύουμε τις δυνάμεις σε αυτούς.
- Σε κάθε άξονα ισχύει: $ΣF_{άξονα} = 0$ αν το σώμα κινείται ευθύγραμμα ομαλά ή είναι ακίνητο και $ΣF_{άξονα} = m\cdot α$ αν το σώμα κάνει μεταβαλλόμενη κίνηση.

ΣΤ. Σώματα σε επαφή - νήματα :

- Όταν δυο ή περισσότερα σώματα βρίσκονται σε επαφή ή ενώνονται με τεντωμένα νήματα και κινούνται τότε τα σώματα έχουν την ίδια επιτάχυνση και την ίδια ταχύτητα όσο χρόνο είναι ενωμένα.
- Για το σύστημα των σωμάτων ισχύει : $Σ\vec{F}=(m_1+m_2+\ldots+m_ν)\cdot\vec{α}$

Παράδειγμα 1. Μέτρηση δύναμης

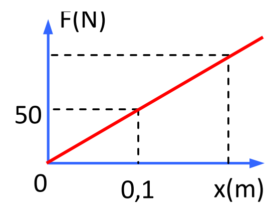
Για ένα ελατήριο που ακολουθεί τον νόμο των ελαστικών παραμορφώσεων (νόμος Hooke) πήραμε τον παρακάτω πίνακα μετρήσεων για την δύναμη και την παραμόρφωση:

x (m)	0	0,05	0,1	
F (N)	0		50	100

Να γίνει διάγραμμα με βάση αυτές τις τιμές και να συμπληρωθεί ο πίνακας.

Λύση

Η σταθερά αναλογίας μεταξύ δύναμης και παραμόρφωσης βρίσκεται αν χρησιμοποιήσουμε το 3° ζεύγος τιμών, άρα $k = \frac{F}{x}$ ή $k = \frac{50\,N}{0,1\,m}$ άρα k = 500 N/m.



Το διάγραμμα που προκύπτει φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Από την σχέση F = k·x θα υπολογίσουμε τις τιμές που λείπουν στον πίνακα:
Για x = 0,05 m: F = (500 N/m)· (0,05 m) ή F = 25 N
Για F = 100 N: F = k·x ή $x = \frac{F}{k}$ ή $x = \frac{100\,N}{500\,N/m}$ ή x = 0,2 m

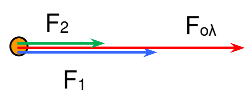
Παράδειγμα 2. Σύνθεση δυνάμεων

Να βρεθεί η συνιστάμενη δυο δυνάμεων με μέτρα F_1 = 8 N και F_2 = 6 N οι οποίες έχουν κοινό σημείο εφαρμογής και οι φορείς τους σχηματίζουν γωνία **α.** $\phi = 0^0$, **β.** 180^0, **γ.** 90^0.

Λύση

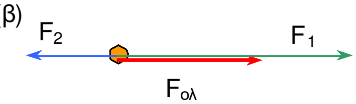
α. Όταν $\phi = 0^0$ οι δυνάμεις είναι ομόρροπες, άρα η συνισταμένη τους είναι:
$\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ άρα $F_{ολ} = F_1 + F_2$ ή $F_{ολ}$ = 8 N + 6 N άρα $F_{ολ}$ = 14 N

(α)

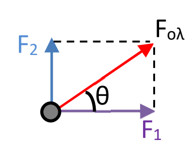


β. Όταν $\phi = 180^0$ οι δυνάμεις είναι αντίρροπες, άρα η συνισταμένη τους είναι:
$\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ άρα $F_{ολ} = F_1 - F_2$ ή $F_{ολ}$ = 8 N – 6 N άρα $F_{ολ}$ = 2 N
Οι κατευθύνσεις των δυνάμεων φαίνονται στα αντίστοιχα σχήματα.

(β)



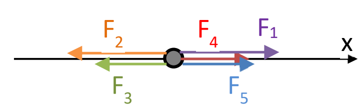
γ. Όταν $\phi = 90^0$ οι δυνάμεις είναι κάθετες, άρα η συνισταμένη τους είναι
$\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ άρα $F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ ή $F_{ολ} = \sqrt{(8\,N)^2 + (6\,N)^2}$ άρα $F_{ολ}$ = 10 N.



Για την γωνία θ που σχηματίζει η συνισταμένη $F_{ολ}$ με την F_1 έχουμε
$εφθ = \frac{F_2}{F_1}$ ή $εφθ = \frac{6\,N}{8\,N}$ άρα $εφθ = \frac{3}{4}$.

Παράδειγμα 3. Συνισταμένη δύναμη

Στο σώμα του σχήματος ασκούνται οι δυνάμεις F_1 = 5 N, F_2 = 4 N, F_3 = 2 N, F_4 = 2,5 N και F_5 = 3 N. Να υπολογίσετε την συνισταμένη δύναμη.



Λύση

Αν θεωρήσουμε θετική φορά την φορά του άξονα x έχουμε:

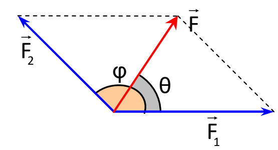
$\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5$ άρα $F_{ολ} = F_1 - F_2 - F_3 + F_4 + F_5$ ή $F_{ολ} = 5$ N – 4 N – 2 N + 2,5 N + 3 N άρα $F_{ολ} = 4{,}5$ N με φορά προς τα θετικά του άξονα x.

Παράδειγμα 4. Συνισταμένη δύναμη

Δυο δυνάμεις που έχουν ίσα μέτρα $F_1 = F_2 = 10$ N ενεργούν στο ίδιο σημείο και σχηματίζουν γωνία $φ = 120^0$. Να βρεθεί το μέτρο και η διεύθυνση της συνισταμένης. Δίνεται $ημ120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν120^0 = -\frac{1}{2}$.

Λύση

Η συνισταμένη των δυνάμεων F_1 και F_2 είναι ίση με την διαγώνιο του παραλληλόγραμμου που έχει πλευρές τις δυνάμεις F_1 και F_2. Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από την σχέση:



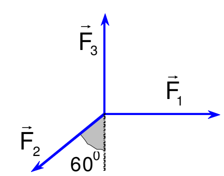
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot συν120^0} \Rightarrow F = \sqrt{10^2 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$ άρα $F = 10$ N

Η διεύθυνση της συνισταμένης σχηματίζει με την δύναμη F_1 γωνία θ για την οποία ισχύει:

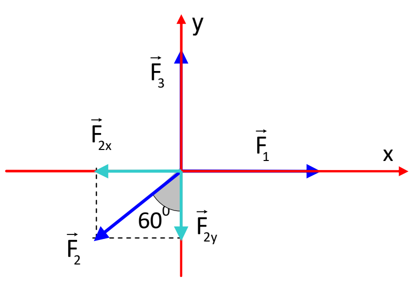
$$εφθ = \frac{F_2 \cdot ημ120^0}{F_1 + F_2 \cdot συν120^0} \Rightarrow εφθ = \frac{10\frac{\sqrt{3}}{2}}{10 + 10\left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow εφθ = \frac{5\sqrt{3}}{10 - 5} \Rightarrow εφθ = \sqrt{3} \Rightarrow θ = 60^0.$$

Παράδειγμα 5. Συνισταμένη δύναμη

Το υλικό σημείο Ο δέχεται τρεις δυνάμεις F_1, F_2 και F_3 όπως στο σχήμα που έχουν μέτρα $F_1 = 50\sqrt{3}$ N, $F_2 = 150$ N, $F_3 = 50$ N. Να βρεθεί η συνισταμένη των δυνάμεων.



Λύση



Εκλέγουμε σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy και αναλύουμε τις δυνάμεις στους άξονες. Η δύναμη F_2 αναλύεται στις συνιστώσες:

$F_{2x} = F_2 ημ60^0 = 150 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}$ N και

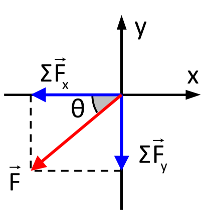
$F_{2y} = F_2 συν60^0 = 150 \text{ N} \cdot \frac{1}{2} = 75$ N.

Υπολογίζοντας την συνισταμένη δύναμη σε κάθε άξονα, έχουμε:

$ΣF_x = F_1 - F_{2x} = 50\sqrt{3}$ N - $75\sqrt{3}$ N = - $25\sqrt{3}$ N

$ΣF_y = F_3 - F_{2y} = 50$ N - 75 N = - 25 N

(Το «-» δείχνει ότι η δύναμη έχει φορά προς τα αρνητικά του άξονα).



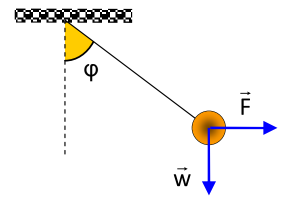
Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης F είναι : $F = \sqrt{(ΣF_x)^2 + (ΣF_y)^2} \Rightarrow$

$$F = \sqrt{\left(-25\sqrt{3}\right)^2 + (-25)^2} \Rightarrow F = \sqrt{25^2 \cdot 4} \Rightarrow F = 50 \text{ N}.$$

Για την γωνία θ που σχηματίζει η συνισταμένη με τον άξονα Ox έχουμε: $εφθ = \frac{ΣF_y}{ΣF_x}$

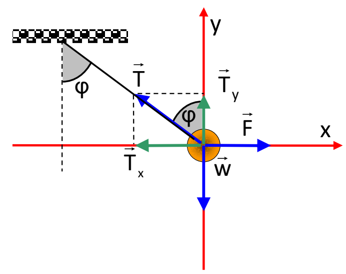
$$\Rightarrow εφθ = \frac{-25\text{N}}{-25\sqrt{3}\text{ N}} \Rightarrow εφθ = \frac{-25}{-25\sqrt{3}} \Rightarrow εφθ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow θ = 30^0.$$

Παράδειγμα 6. Ισορροπία σώματος



Μικρή σφαίρα που έχει βάρος w = 10 N είναι κρεμασμένη με σχοινί από οροφή. Όταν στην σφαίρα ενεργήσει μια οριζόντια δύναμη $F = w\sqrt{3}$, το σχοινί εκτρέπεται κατά γωνία φ από την κατακόρυφη θέση του. Να υπολογιστούν:
α. η γωνία φ
β. η μεταβολή της τάσης του σχοινιού από την κατακόρυφη θέση στην θέση εκτροπής.

Λύση



α. Θεωρούμε σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy όπως στο σχήμα. Αναλύουμε την δύναμη Τ (τάση του νήματος) η οποία σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Oy. Οι συνιστώσες είναι $T_x = Tημφ$ και $T_y = Tσυνφ$.

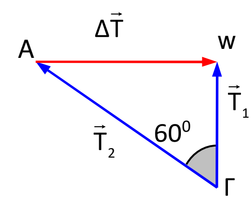
Η σφαίρα ισορροπεί άρα $\Sigma\vec{F} = 0$. Για κάθε άξονα έχουμε:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - T_x = 0 \Rightarrow Tημφ = w\sqrt{3}$ ❶

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y - w = 0 \Rightarrow Tσυνφ = w$ ❷

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις ❶ και ❷ έχουμε: $\dfrac{Tημφ}{Tσυνφ} = \dfrac{w\sqrt{3}}{w}$

$\Rightarrow εφφ = \sqrt{3} \Rightarrow φ = 60^0$



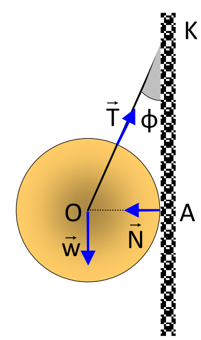
β. Αν ονομάσουμε T_1 την αρχική τάση του σχοινιού είναι $T_1 = w$

(από την αρχική κατάσταση ισορροπίας). Αν T_2 η τελική τάση από την σχέση ❷ για $φ = 60^0$ έχουμε $T_2\dfrac{1}{2} = w \Rightarrow T_2 = 2w$ και σχηματίζει γωνία $φ = 60^0$ με την αρχική. Έτσι φτιάχνω το διπλανό σχήμα.

Από την θεωρία των ορθογωνίων τριγώνων έχουμε ότι η γωνία Β είναι ίση με 90^0. Άρα με Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι : $(\Delta T)^2 = T_2^2 - T_1^2 \Rightarrow (\Delta T)^2 = (2w)^2 - w^2 \Rightarrow (\Delta T)^2 = 4w^2 - w^2 \Rightarrow (\Delta T)^2 = 3w^2 \Rightarrow$

$\Delta T = w\sqrt{3}$ και όπως φαίνεται από το σχήμα η κατεύθυνση της είναι οριζόντια.

Παράδειγμα 7. Ισορροπία σώματος



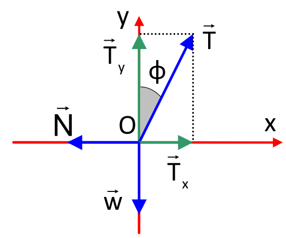
Σφαίρα βάρους w = 40 N και ακτίνας R = 3 m είναι δεμένη με νήμα μήκους ℓ = 2 m και ισορροπεί σε κατακόρυφο τοίχο όπως στο σχήμα. Να υπολογιστούν :
α. Η δύναμη Τ με την οποία τείνετε το νήμα
β. Η δύναμη Ν που ασκείται από τον τοίχο στην σφαίρα. Τριβές δεν υπάρχουν.

Λύση

Από το σχήμα έχουμε $OK = R + \ell = 5$ m. Το τρίγωνο ΑΚΟ είναι ορθογώνιο με $AO = R = 3$ m άρα $AK = \sqrt{OK^2 - AO^2} \Rightarrow AK = \sqrt{5^2 - 3^2} \Rightarrow AK = \sqrt{16} \Rightarrow AK = 4$ m.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΚ έχουμε: $ημφ = \dfrac{OA}{OK} \Rightarrow ημφ = \dfrac{3}{5}$ και $συνφ = \dfrac{AK}{OK}$

$\Rightarrow συνφ = \dfrac{4}{5}$. Η σφαίρα ισορροπεί υπό την επίδραση 3 δυνάμεων άρα αυτές περνάνε από το ίδιο σημείο το Ο. Θεωρούμε σύστημα ορθογωνίων αξόνων με κέντρο το Ο και μεταφέρουμε σε αυτό τις δυνάμεις όπως στο σχήμα. Η δύναμη T σχηματίζει με τον άξονα Oy γωνία φ και αναλύεται στις συνιστώσες $T_x = Tημφ$ και $T_y = Tσυνφ$. Από την ισορροπία της σφαίρας έχουμε $\Sigma\vec{F} = 0$ που για κάθε άξονα δίνει:

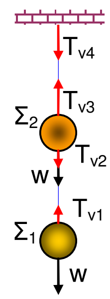


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y - w = 0 \Rightarrow Tσυνφ = w \Rightarrow T\frac{4}{5} = 40\ N \Rightarrow$ $T = 50\ N.$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_x - N = 0 \Rightarrow Tημφ = N \Rightarrow N = (50\ N)\cdot\frac{3}{5} \Rightarrow$ $N = 30\ N.$

Παράδειγμα 8. Νόμοι Newton

Μέσω δυο νημάτων κρέμονται δυο σφαίρες όπως στο σχήμα με βάρος w = 10 N η κάθε μια. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις με τις οποίες τείνονται τα νήματα και η δύναμη που ασκείται στην οροφή.



Λύση

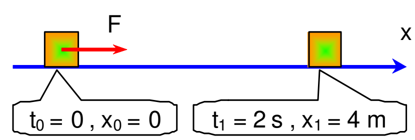
Οι δυνάμεις που ασκούνται στα νήματα και τις σφαίρες φαίνονται στο σχήμα.
Από την ισορροπία της σφαίρας $Σ_1$ έχουμε: $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $T_{ν1} - w = 0$ ή $T_{ν1} = w$ άρα $T_{ν1} = 10\ N$.
Είναι $T_{ν1} = T_{ν2}$ άρα $T_{ν2} = 10\ N$.
Η δύναμη που ασκείται στην οροφή είναι η $T_{ν2}$. Από την ισορροπία της σφαίρας $Σ_2$ έχουμε:
$\Sigma\vec{F} = 0$ ή $T_{ν3} - w - T_{ν2} = 0$ ή $T_{ν3} = w + T_{ν2}$ ή $T_{ν3} = 10\ N + 10\ N$ άρα $T_{ν3} = 20\ N$ και $T_{ν4} = T_{ν3} = 20\ N$.

Παράδειγμα 9. Νόμοι Newton

Σώμα με μάζα m είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη με μέτρο F = 10 N και το σώμα σε χρόνο Δt = 2 s μετατοπίζεται κατά Δx = 4 m. Να βρεθεί η μάζα του σώματος.

Λύση

Αν θέσουμε $υ_0 = 0$ στην εξίσωση κίνησης $Δx = υ_0 Δt + \frac{1}{2}α(Δt)^2$ έχουμε $Δx = \frac{1}{2}α(Δt)^2$ ή $α = \frac{2\cdot Δx}{(Δt)^2}$ ή $α = \frac{2\cdot 4\,m}{(2\,s)^2}$ άρα $α = 2\ m/s^2$

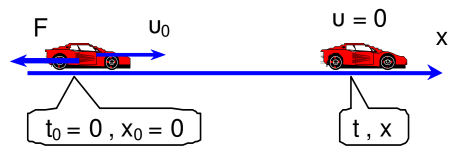


Στον οριζόντιο άξονα εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton και έχουμε $F = m\cdot α$ ή $m = \frac{F}{α}$ ή $m = \frac{10\,N}{2\,m/s^2}$ άρα $m = 5\ kg$.

Παράδειγμα 10. Νόμοι Newton

Ένα αυτοκίνητο με μάζα m = 1000 kg κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $υ_0 = 20\ m/s$. Ο οδηγός πατάει φρένο, οπότε ασκείται στο σώμα σταθερή δύναμη, αντίθετη στην ταχύτητα με μέτρο F = 4000 N. Να υπολογιστούν:
α. Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου
β. Σε πόσο χρόνο και σε ποια απόσταση θα σταματήσει το αυτοκίνητο.

Λύση



α. Στον οριζόντιο άξονα εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton για το αυτοκίνητο και έχουμε F = m·α ή $α=\frac{F}{m}$ ή $α=\frac{-4000\,N}{1000\,kg}$

άρα $α = -4\ m/s^2$

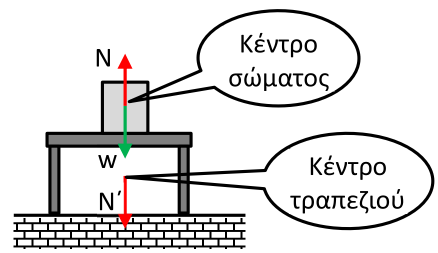
β. Το αυτοκίνητο σταματάει όταν υ = 0, επομένως από την εξίσωση της ταχύτητας $υ = υ_0 + α\cdot(t – t_0)$ για $t_0 = 0$ έχουμε $0 = υ_0 + α\cdot t$ ή $t=\frac{-υ_0}{α}$ ή $t=\frac{-20\,m/s}{-4\,m/s^2}$ άρα t = 5 s.

Η θέση του σώματος όταν σταματήσει δίνεται από την εξίσωση κίνησης

$Δx=υ_0Δt+\frac{1}{2}α(Δt)^2$ ή $Δx=(20\,m/s)(5\,s)+\frac{1}{2}(-4\,m/s^2)(5\,s)^2$ άρα Δx = 50 m.

Παράδειγμα 11. Νόμοι Newton

Ένα σώμα ισορροπεί πάνω σε ένα τραπέζι. Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις των παραπάνω δυνάμεων. Από την εφαρμογή του 1ου και 3ου νόμου Newton τι συμπέρασμα προκύπτει για τα μέτρα των παραπάνω δυνάμεων;



Λύση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις: Βάρος (w) και κάθετη αντίδραση δαπέδου (N). Οι δυνάμεις σχεδιάζονται στο κέντρο (μάζας) του σώματος

- το βάρος με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς το κέντρο της Γης,
- η κάθετη αντίδραση με διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια επαφής και φορά προς το σώμα.

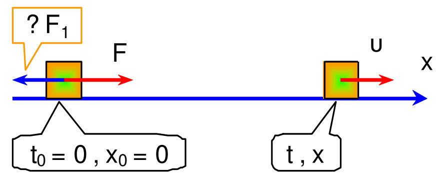
Το σώμα ισορροπεί, άρα σύμφωνα με τον 1ο νόμο Newton ισχύει ΣF = 0 ή N – w = 0 άρα **N = w** (1)
Οι αντιδράσεις των παραπάνω δυνάμεων θα υπολογιστούν και θα σχεδιαστούν σύμφωνα με τις αλληλεπιδράσεις του σώματος.
Το βάρος (w) ασκείται από την Γη, άρα η αντίδρασή του θα είναι στο κέντρο της Γης και ισχύει $\vec{w}' = -\vec{w}$, άρα για τα μέτρα των δυνάμεων **w΄ = w** (2)
Η κάθετη αντίδραση (N) ασκείται από το τραπέζι, άρα η αντίδρασή της θα είναι στο κέντρο του τραπεζιού και ισχύει $\vec{N}' = -\vec{N}$, άρα για τα μέτρα των δυνάμεων **N΄= N** (3)
Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει για τα μέτρα όλων των δυνάμεων ότι **w΄= w = N = N΄.**

Παράδειγμα 12. Νόμοι Newton

Σώμα μάζας m = 10 kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη με μέτρο F = 50 N. Παρατηρούμε ότι το σώμα αποκτά ταχύτητα υ = 10 m/s όταν έχει μετατοπιστεί κατά Δx = 25 m. Να εξετάσετε αν στο σώμα ασκείται άλλη δύναμη. Αν ναι, να υπολογίσετε την τιμή της.

Λύση

Είναι $υ_0 = 0$ την $t_0 = 0$. Από την εξίσωση $α = \dfrac{υ^2 - υ_0^2}{2 \cdot Δx}$ έχουμε



$α = \dfrac{(10\,m/s)^2 - 0^2}{2 \cdot (25\,m)}$ ή $α = 2\ m/s^2$.

Από τον 2ο νόμο Newton η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα : $ΣF = m \cdot α$ ή $ΣF = (10\ kg) \cdot (2\ m/s^2)$ άρα $ΣF = 20\ N$. Η συνισταμένη δύναμη είναι μικρότερη από την δύναμη F, άρα στο σώμα ασκείται και άλλη δύναμη, αντίθετη της F. Έχουμε $ΣF = F – F_1$ ή $F_1 = F – ΣF$ ή $F_1 = 50\ N – 20\ N$ άρα $F_1 = 30\ N$.

Παράδειγμα 13. Κίνηση σε ανελκυστήρα

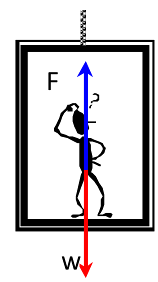
Ένας μαθητής μάζας $m = 70\ kg$ βρίσκεται σε ανελκυστήρα. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$. Πόση είναι η δύναμη που ασκεί το δάπεδο του ανελκυστήρα στον μαθητή αν ο ανελκυστήρας κινείται:

α. Προς τα κάτω με επιτάχυνση $2\ m/s^2$

β. Προς τα επάνω με σταθερή επιτάχυνση $3\ m/s^2$

γ. Με σταθερή ταχύτητα $υ = 2\ m/s$.

Λύση



Το βάρος του μαθητή είναι $w = mg$.
Η επιτάχυνση σε κάθε περίπτωση έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης των δυνάμεων.

α. Όταν ο ανελκυστήρας κινείται προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση πρέπει το βάρος να είναι μεγαλύτερο από την δύναμη που ασκεί το δάπεδο, άρα $w – F = mα$ ή $F = w – mα$ ή $F = m(g – α)$ ή $F = (70\ kg) \cdot (10\ m/s^2 – 2\ m/s^2)$ άρα $F = 560\ N$.

β. Όταν ο ανελκυστήρας κινείται προς τα επάνω με σταθερή επιτάχυνση πρέπει το βάρος να είναι μικρότερο από την δύναμη που ασκεί το δάπεδο ή $F – w = mα$ ή $F = w + mα$ ή $F = m(g + α)$ επομένως
$F = (70\ kg) \cdot (10\ m/s^2 + 3\ m/s^2)$ άρα $F = 910\ N$.

γ. Όταν ο ανελκυστήρας κινείται με σταθερή ταχύτητα η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν άρα το βάρος είναι ίσο με την δύναμη που ασκεί το δάπεδο ή $F = w$ ή $F = mg$ επομένως $F = (70\ kg) \cdot (10\ m/s^2)$ άρα $F = 700\ N$.

Παράδειγμα 14. 2ος νόμος Newton

Δυο άνθρωποι που βρίσκονται στις όχθες ποταμού τραβούν ταυτόχρονα βάρκα με μάζα $m = 100\ kg$ μέσω σχοινιών, ασκώντας δυνάμεις που έχουν το ίδιο μέτρο $F = 80\ N$ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $φ = 120^0$. Να υπολογιστούν :

α. Η επιτάχυνση της βάρκας

β. Η διεύθυνση κίνησης της βάρκας

γ. Η ταχύτητα που αποκτά η βάρκα σε χρόνο $Δt = 5\ s$ μετά από την εφαρμογή των δυνάμεων και το διάστημα που διανύει στο χρόνο αυτό.

Λύση

α. Η συνιστάμενη των δυνάμεων είναι: $F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2συν120^0} \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2(-\frac{1}{2})} \Rightarrow$
$F_{ολ} = \sqrt{F^2 + F^2 - F^2} \Rightarrow F_{ολ} = \sqrt{F^2}$ άρα $F_{ολ} = F$. Άρα η συνιστάμενη δύναμη στη βάρκα είναι $F_{ολ} = 80\ N$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε $F = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{80\,N}{100\,kg} \Rightarrow$ $\alpha = 0{,}8\ m/s^2$.

β. Η διεύθυνση κίνησης της βάρκας συμπίπτει με την διεύθυνση της συνιστάμενης δύναμης. Αυτή δίνεται από την: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{F\eta\mu 120^0}{F + F\sigma\upsilon\nu 120^0} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{F \cdot [1 + (-\frac{1}{2})]} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \sqrt{3} \Rightarrow$ $\theta = 60^0$.

γ. Η βάρκα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Η ταχύτητα της βάρκας μετά από χρόνο Δt, για $t_0 = 0$ και $\upsilon_0 = 0$ δίνεται από την $\upsilon = \alpha \cdot t \Rightarrow \upsilon = 0{,}8\ m/s^2 \cdot 5\ s \Rightarrow$ $\upsilon = 4\ m/s$.

Η μετατόπιση στον ίδιο χρόνο, για $t_0 = 0$ και $\upsilon_0 = 0$, δίνεται από την $\Delta x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}(0{,}8\frac{m}{s^2})(5\,s)^2 \Rightarrow$

$\Delta x = 10\ m$.

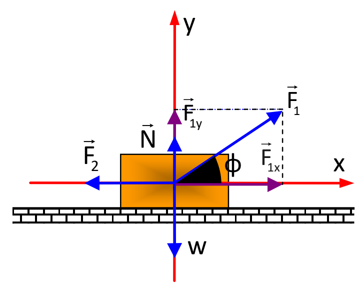
Παράδειγμα 15. 2ος νόμος Newton

Σώμα μάζας $m = 2\ kg$ κινείται σε λείο και οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση των δυνάμεων $F_1 = 20\ N$ που σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^0$ με το επίπεδο και $F_2 = 10\ N$ όπως στο σχήμα. Το σώμα σε χρόνο $\Delta t_1 = 5\ s$ μετατοπίζεται κατά $\Delta x_1 = 40\ m$. Να υπολογιστούν:

α. Το μέτρο της δύναμης Ν που ασκείται από το δάπεδο στο σώμα

β. Σε πόσο χρόνο το σώμα θα μετατοπιστεί κατά $\Delta x_2 = 160\ m$. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση



Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος w, η δύναμη από το δάπεδο Ν και οι δυνάμεις F_1 και F_2. Εκλέγουμε κατάλληλο σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα και αναλύουμε την δύναμη F_1 στις F_{1x} και F_{1y}. Είναι

$$F_{1x} = F_1\sigma\upsilon\nu 60^0 \Rightarrow F_{1x} = 20 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow F_{1x} = 10\ N.$$

$$F_{1y} = F_1\eta\mu 60^0 \Rightarrow F_{1\upsilon} = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F_{1y} = 10\sqrt{3}\ N$$

α. Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί άρα $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{1y} + F_k - w = 0 \Rightarrow$

$F_k = mg - F_{1y} \Rightarrow F_k = 2 \cdot 10 - 10\sqrt{3} \Rightarrow$ $F_k = 10(2 - \sqrt{3})\ N$.

β. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον άξονα x και έχουμε $\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow F_{1x} - F_2 = m\alpha$ $\Rightarrow \alpha = \frac{F_{1x} - F_2}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{10 - 10}{2} \Rightarrow \alpha = 0$.

Το σώμα στον άξονα x κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\upsilon = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \upsilon = \frac{40\,m}{5\,s} \Rightarrow \upsilon = 8\ m/s$.

Επομένως σε χρόνο Δt_2 μετατοπίζεται κατά Δx_2 και είναι $\Delta x_2 = \upsilon \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{\upsilon} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{160\,m}{8\,m/s} \Rightarrow$

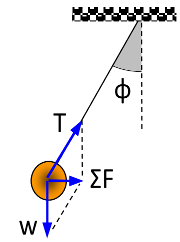
$\Delta t_2 = 20\ s$.

Παράδειγμα 16. Κίνηση και ισορροπία

Σώμα έχει κρεμαστεί από την οροφή αυτοκίνητου μέσω νήματος. Το αυτοκίνητο κινείται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση α. Αν η γωνία απόκλισης του νήματος από την κατακόρυφο είναι $\varphi = 45^0$ να υπολογιστεί η επιτάχυνση α του αυτοκίνητου όταν δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις: Το βάρος w = mg και η τάση του νήματος T. Το αυτοκίνητο κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, άρα και το σώμα που βρίσκεται σε ισορροπία ως προς το αυτοκίνητο θα κάνει την ίδια κίνηση. Επειδή το σώμα κινείται οριζόντια με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση θα έχουμε: $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \Sigma F = m\alpha$. Από το σχήμα το τρίγωνο που σχηματίζουν οι δυνάμεις w, ΣF είναι ορθογώνιο άρα: $\varepsilon\varphi\phi = \frac{\Sigma F}{w} \Rightarrow \Sigma F = w\varepsilon\varphi\phi \Rightarrow m\alpha = mg\varepsilon\varphi\phi \Rightarrow \alpha = g\varepsilon\varphi\phi \Rightarrow$



$\alpha = 10 m/s^2 \cdot \varepsilon\varphi 45^0 \Rightarrow \alpha = 10\ m/s^2$.

Παράδειγμα 17. Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο

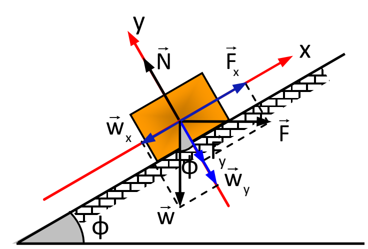
Σώμα μάζας m = 3 kg ανέρχεται κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\phi = 30^0$ με την επίδραση οριζόντιας δύναμης F και έχει σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2\ m/s^2$. Να υπολογιστούν:

α. Το μέτρο της δύναμης F

β. Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το δάπεδο στο σώμα. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

Στο σώμα ασκούνται: το βάρος w, η οριζόντια δύναμη F, και η αντίδραση N από το δάπεδο. Εκλέγουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων από τους οποίους ο ένας είναι παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο και αναλύουμε τις δυνάμεις στο σύστημα αυτό. Η δύναμη F σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Ox άρα $F_x = F\sigma\upsilon\nu\phi$ και $F_y = F\eta\mu\phi$. Η δύναμη του βάρους σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Oy άρα $w_x = w\eta\mu\phi$ και $w_y = w\sigma\upsilon\nu\phi$.



Άξονας Ox: $\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow F_x - w_x = m\alpha \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu 30^0 = m\alpha + mg\eta\mu 30^0 \Rightarrow$

$$F\frac{\sqrt{3}}{2} = 12 + 30\frac{1}{2} \Rightarrow F = 14\sqrt{3}\,N$$

Άξονας Oy: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - F_y - w_y = 0 \Rightarrow N = F\eta\mu 30^0 + mg\sigma\upsilon\nu 30^0 \Rightarrow$

$$N = 14\sqrt{3}\frac{1}{2} + 3\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow N = 22\sqrt{3}\,N$$

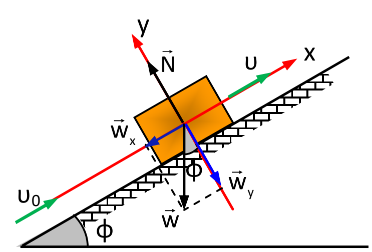
Παράδειγμα 18. Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο

Σώμα εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\phi = 30^0$ με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10\ m/s$ προς τα επάνω παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο. Να υπολογιστούν:

α. Η επιβράδυνση του σώματος

β. Ο μέγιστος χρόνος ανόδου και η μετατόπιση του σώματος μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του.

Τριβή δεν υπάρχει και δίνεται $g = 10\ m/s^2$.



Λύση

Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις: Το βάρος w και η αντίδραση N από το επίπεδο. Εκλέγουμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με τον ένα άξονα παράλληλο στην διεύθυνση της κίνησης.

Το βάρος σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Oy. Αναλύουμε το βάρος w στις συνιστώσες w_x και w_y.

Είναι: $w_x = w\eta\mu\phi \Rightarrow w_x = mg\eta\mu\phi$ και $w_y = w\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow w_y = mg\sigma\upsilon\nu\phi$.

Στον άξονα Ox ισχύει: $\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow -w_x = m\alpha \Rightarrow -mg\eta\mu\phi = m\alpha \Rightarrow \alpha = -g\eta\mu\phi \Rightarrow \alpha = -10\eta\mu 30^0$ άρα $\alpha = -5\ m/s^2$.

Το σώμα σταματάει στιγμιαία όταν $υ = 0$. Επειδή το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, για $t_0 = 0$ ισχύει $υ = υ_0 + αt$. Άρα $υ_0 + αt_{max} = 0 \Rightarrow t_{max} = -\frac{υ_0}{α} \Rightarrow t_{max} = -\frac{10\,m/s}{-5\,m/s^2} \Rightarrow$ $t_{max} = 2$ s.

Η μετατόπιση του σώματος δίνεται από την σχέση :

$$Δx_{max} = υ_0 t + \frac{1}{2}αt^2 \Rightarrow Δx_{max} = \left(10\frac{m}{s}\right)\cdot(2s) + \frac{1}{2}\cdot\left(-5\frac{m}{s^2}\right)\cdot(2s)^2 \Rightarrow Δx_{max} = 10\ m.$$

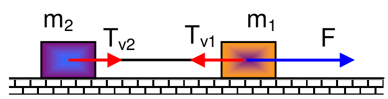
Παράδειγμα 19. Κίνηση δύο σωμάτων

Δυο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες $m_1 = 20$ kg και $m_2 = 30$ kg αντίστοιχα είναι δεμένα με ιδανικό νήμα και ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα σώματα σύρονται από οριζόντια δύναμη F = 80 N που ασκείται στο σώμα $Σ_1$. Αν μετά από χρόνο $Δt_1 = 5$ s το νήμα κόβεται να υπολογιστεί πόσο θα απέχουν τα σώματα σε χρόνο $Δt_2 = 5$ s μετά το κόψιμο του νήματος αν η δύναμη F εξακολουθεί να ασκείται στο σώμα $Σ_1$. Τριβές δεν υπάρχουν. Το μήκος του νήματος θεωρείται αμελητέο σε σχέση με τις μετατοπίσεις.

Λύση

α. Τα σώματα είναι συνδεδεμένα με το νήμα

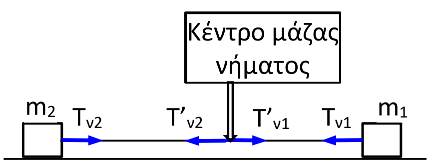
Τα σώματα έχουν κοινή επιτάχυνση α γιατί στον ίδιο χρόνο διανύουν ίσες μετατοπίσεις.



Στο σώμα $Σ_2$ ασκείται η δύναμη $T_{ν2}$ από το νήμα, άρα από τον 2ο νόμο Newton έχουμε: $T_{ν2} = m_2 \cdot α$ ❶

Στο σώμα $Σ_1$ ασκούνται η οριζόντια δύναμη F και η δύναμη $T_{ν1}$ από το νήμα, άρα από τον 2ο νόμο Newton έχουμε: $F - T_{ν1} = m_1 \cdot α$ ❷

Για ιδανικό (αβαρές και μη εκτατό) νήμα ισχύει $T_{ν2} = T_{ν1}$.



$T_{ν1} = T'_{ν1}$ (δράση – αντίδραση για τα σώματα m_1 - νήμα)
$T_{ν2} = T'_{ν2}$ (δράση – αντίδραση για τα σώματα m_2 - νήμα)
Για το νήμα $ΣF_{νημ} = m_ν α$ ή $T'_{ν1} - T'_{ν2} = m_ν α$ (αβαρές νήμα άρα $m_ν = 0$) άρα $T'_{ν1} - T'_{ν2} = 0$ άρα $T'_{ν1} = T'_{ν2}$ άρα $T_{ν1} = T_{ν2}$

Προσθέσουμε κατά μέλη τις ❶ και ❷ : $F - T_{ν1} + T_{ν2} = m_1 \cdot α + m_2 \cdot α$ άρα

$F = (m_1 + m_2)\cdot α$ ή $α = \frac{F}{m_1 + m_2}$ ή $α = \frac{80\,N}{30\,kg + 20\,kg}$ άρα **$α = 1{,}6\ m/s^2$.**

Στην χρονική διάρκεια $Δt_1$ τα δύο σώματα αποκτούν την ίδια ταχύτητα υ όπου $υ = υ_0 + α\cdot Δt_1$.
Για $υ_0 = 0$ έχουμε $υ = α\cdot Δt_1$ ή $υ = (1{,}6\ m/s^2)\cdot(5\ s)$ άρα **$υ = 8\ m/s$.**

β. Κίνηση των σωμάτων μετά το κόψιμο του νήματος

- Κίνηση του σώματος $Σ_2$

Το σώμα $Σ_2$ μετά το κόψιμο του νήματος κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, γιατί δεν ασκείται πάνω του δύναμη στον οριζόντιο άξονα. Άρα στην χρονική διάρκεια $Δt_2$ μετατοπίζεται κατά $Δx_2 = υ\cdot Δt_2$ ❶

- Κίνηση του σώματος $Σ_1$

Το σώμα $Σ_1$ μετά το κόψιμο του νήματος κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (με επιτάχυνση $α_1$, διαφορετική της αρχικής α, γιατί άλλαξε η μάζα την οποία μετακινεί η δύναμη F) στον οριζόντιο άξονα.

Στο σώμα $Σ_1$ ασκείται μόνο η οριζόντια δύναμη F άρα από τον 2ο νόμο Newton έχουμε: $F = m_1 \cdot α_1$ ή $α_1 = \frac{F}{m_1}$ ή $α_1 = \frac{80\,N}{20\,kg}$ άρα **$α_1 = 4\ m/s^2$.**

Άρα στη χρονική διάρκεια $Δt_2$ το σώμα $Σ_1$ μετατοπίζεται κατά $Δx_1 = υ\cdot Δt_2 + \frac{1}{2}α_1 \cdot Δt_2^2$ ❷

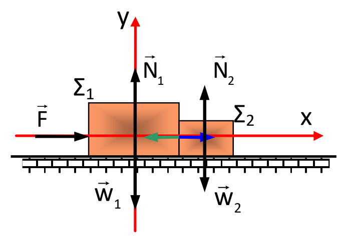
Σε χρόνο Δt_2 μετά το κόψιμο του νήματος τα δύο σώματα θα απέχουν $d = \Delta x_1 - \Delta x_2$ και από τις ❶ ,❷ είναι $d = (\upsilon \cdot \Delta t_2 + \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot \Delta t_2^2) - (\upsilon \cdot \Delta t_2)$ ή $d = \upsilon \cdot \Delta t_2 + \frac{1}{2}\alpha_1 \cdot \Delta t_2^2 - \upsilon \cdot \Delta t_2$ άρα $d = \frac{1}{2}\alpha_2 \cdot \Delta t_2^2$ ή $d = \frac{1}{2}\left(4\frac{m}{s^2}\right)\cdot(5\,s)^2$ άρα **d = 50 m**.

Παράδειγμα 20. Κίνηση συστήματος σωμάτων

Δυο σώματα Σ_1 και Σ_2 με αντίστοιχες μάζες $m_1 = 15$ kg και $m_2 = 10$ kg βρίσκονται σε επαφή σε λείο και οριζόντιο δάπεδο. Αν στο σώμα Σ_1 α-σκηθεί οριζόντια δύναμη F = 50 N όπως στο σχήμα να υπολογιστούν:

α. Η επιτάχυνση κάθε σώματος

β. Η δύναμη που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.



Λύση

Στο σύστημα των δυο σωμάτων ασκούνται οι δυνάμεις: Τα βάρη w_1 και w_2, οι δυνάμεις από το δάπεδο N_1 και N_2 και η δύναμη F. (Οι δυνάμεις από το ένα σώμα στο άλλο είναι ίσες και αντίθετες άρα για το σύστημα έχουν μηδενική συνιστάμενη). Τα σώματα έχουν την ίδια επιτάχυνση που είναι και η επιτάχυνση του συστήματος διαφορετικά θα έχαναν την επαφή τους. Για τον άξονα x έχουμε: $\Sigma F_x = m_{ολ}\cdot\alpha \Rightarrow F = (m_1 + m_2)\cdot\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m_1 + m_2} \Rightarrow \alpha = \frac{50\,N}{15\,kg + 10\,kg} \Rightarrow$ $\alpha = 2$ m/s^2.

Για να βρούμε τη δύναμη F_{12} που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο εξετάζουμε μόνο του το ένα σώμα πχ το Σ_2. Είναι: $\Sigma F = m_2\cdot\alpha \Rightarrow F_{12} = m_2\cdot\alpha \Rightarrow F_{12} = 10\,Kg\cdot 2\,m/s^2 \Rightarrow F_{12} = 20\,N$

Παράδειγμα 21. Κίνηση συστήματος σωμάτων

Σώμα μάζας $m_1 = 4$ kg βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο με νήμα που περνάει από ακί-νητη τροχαλία. Αν στο άκρο του νήματος (α) εφαρμοστεί δύναμη F = 10 N ή (β) εξαρτηθεί σώμα βάρους w_2 = 10 N να συγκριθούν οι επιταχύνσεις που αποκτά το σώμα σε κάθε περίπτωση. Ποια είναι τα συμπερά-σματα που προκύπτουν. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

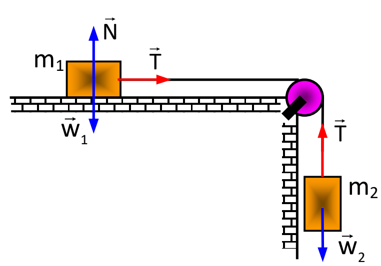
Λύση

α. Αν στο άκρο του νήματος ασκείται δύναμη F, τότε λόγω της τροχαλίας η δύναμη που επιταχύνει το σώμα είναι η F. Άρα το σώμα αποκτά επιτάχυνση α_1: $F = m_1\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{F}{m_1} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{10\,N}{4\,Kg} \Rightarrow$ $\alpha_1 = 2,5$ m/s^2.

β. Αν στο άκρο του νήματος εξαρτηθεί σώμα με βάρος w_2, τότε αυτή η δύναμη επιταχύνει το σύστημα των δυο σωμάτων. Αν το σύστημα αποκτά επιτάχυνση α_2 είναι :

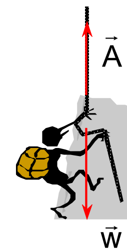
$\Sigma F = m_{ολ}\alpha_2 \Rightarrow w_2 = (m_1 + m_2)\cdot\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{w_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{10\,N}{4\,kg + 1\,kg} \Rightarrow$

$\alpha_2 = 2$ m/s^2.



Παρατηρούμε ότι το σώμα Σ_1 με την επίδραση της ίδιας δύναμης αποκτά μεγαλύτερη επιτάχυνση στην πρώτη περίπτωση. Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί στην δεύτερη περίπτωση η αδράνεια (συνολική μάζα) είναι μεγαλύτερη.

Παράδειγμα 22. Κίνηση ενός σώματος



Ένας άνθρωπος με βάρος w = 800 N είναι έτοιμος να εγκαταλείψει ένα φλεγόμενο κτίριο από ένα παράθυρο που βρίσκεται σε ύψος h = 30 m πάνω από το πεζοδρόμιο. Για να σωθεί μπορεί να χρησιμοποιήσει καλώδιο αρκετού μήκους αλλά με αντοχή T_α = 700 N (μικρότερη από το βάρος). Ζητείται η ελάχιστη ταχύτητα υ με την οποία ο άνθρωπος φτάνει στο πεζοδρόμιο ώστε η σύγκρουση με το έδαφος να περιοριστεί στο ελάχιστο. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο είναι το βάρος w και η δύναμη από το καλώδιο A. Η δύναμη A είναι ίση με την δύναμη που τείνει το καλώδιο. Θεωρούμε κατακόρυφο άξονα Oy με θετική φορά προς τα κάτω. Αν ο άνθρωπος κατεβαίνει το καλώδιο με σταθερή ταχύτητα τότε α = 0 άρα ΣF = 0 ⇒ w - A = 0 ⇒ A = w ⇒ A = 800 N, άρα το καλώδιο θα σπάσει.

Για να μην συμβεί αυτό πρέπει A < w Δηλαδή ο άνθρωπος να κατεβαίνει με επιτάχυνση α για την οποία ισχύει ΣF = mα ⇒ w - A = mα. Για να είναι ελάχιστη η επιτάχυνση καθόδου πρέπει A = T_θ. Άρα mα = w - T_θ .

Επειδή ισχύει w = mg ⇒ $m=\dfrac{w}{g}$. Η προηγούμενη σχέση γίνεται $\dfrac{w\alpha}{g}=w-T_\theta \Rightarrow \alpha=\dfrac{(w-T_\theta)\cdot g}{w} \Rightarrow$

$\alpha=\dfrac{(800\,N-700\,N)\cdot(10\,m/s^2)}{800\,N} \Rightarrow$ α = 1,25 m/s^2.

Ο άνθρωπος κατεβαίνει από ύψος h με σταθερή επιτάχυνση α άρα έχουμε : $h=\dfrac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t=\sqrt{\dfrac{2h}{\alpha}} \Rightarrow$

$\Delta t=\sqrt{\dfrac{2\cdot 10\,m}{1{,}25\,m/s^2}} \Rightarrow \Delta t = 4$ s.

Άρα η ταχύτητα με την οποία φτάνει στο έδαφος είναι: υ = α·Δt ⇒ υ = 1,25·4 ⇒ υ = 5 m/s.

Παράδειγμα 23. Ελεύθερη πτώση

Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 ένα σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος h = 80 m.

α. Ποια είναι η ταχύτητα και η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t = 2 s.

β. Πόση απόσταση έχει διανύσει το σώμα τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα υ = 30 m/s.

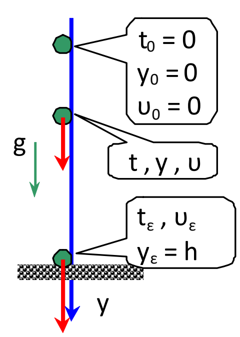
γ. Ποια χρονική στιγμή φτάνει στο έδαφος και με ποια ταχύτητα. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση

α. Η ταχύτητα είναι υ = g·t ή υ = (10 m/s^2)·(2 s) άρα υ = 20 m/s.

Η θέση του σώματος δίνεται από τη σχέση $y=\dfrac{1}{2}g\cdot t^2$ ή $y=\dfrac{1}{2}\left(10\dfrac{m}{s^2}\right)\cdot(2\,s)^2$

άρα y = 20 m.



β. Είναι υ = g·t ή $t=\dfrac{υ}{g}$ ή $t=\dfrac{30\,m/s}{10\,m/s^2}$ άρα t = 3 s.

και $y=\dfrac{1}{2}g\cdot t^2$ ή $y=\dfrac{1}{2}\left(10\dfrac{m}{s^2}\right)\cdot(3\,s)^2$ άρα y = 30 m.

γ. Στο έδαφος y = h ή $\dfrac{1}{2}g\cdot t^2=h$ ή $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ή $t=\sqrt{\dfrac{2\cdot 80\,m}{10\,m/s^2}}$ άρα t = 4 s.

Η ταχύτητα δίνεται από την υ = g·t ή υ = (10 m/s^2)·(4 s) άρα υ = 40 m/s.

Μεθοδολογία ασκήσεων με τριβή

Α. Η δύναμη της τριβής είναι αντίθετη στην ολίσθηση των σωμάτων και όχι κατ' ανάγκη στην κίνηση των σωμάτων.

Β. Όταν δεν γίνεται διάκριση ανάμεσα στον συντελεστή οριακής τριβής και τον συντελεστή τριβής ολίσθησης θα θεωρούμε ότι έχουν την ίδια τιμή.

Γ. Σε προβλήματα με τριβή ολίσθησης εφαρμόζεται η μεθοδολογία για δυνάμεις σε κινούμενα ή ακίνητα σώματα και επιπλέον :

❶ Από την συνθήκη $\Sigma F_y = 0$ βρίσκουμε την κάθετη δύναμη αντίδρασης N

❷ Από την σχέση $T = \mu \cdot N$ βρίσκουμε την τριβή T

❸ Από την σχέση $\Sigma F_x = m \cdot \alpha$ βρίσκουμε την επιτάχυνση (ή επιβράδυνση) α, αν το σώμα κάνει μεταβαλλόμενη κίνηση.

Παράδειγμα 24. Κίνηση ενός σώματος

Σώμα ρίχνεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 20$ m/s σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Δίνεται $g = 10$ m/s^2. Να υπολογιστούν:

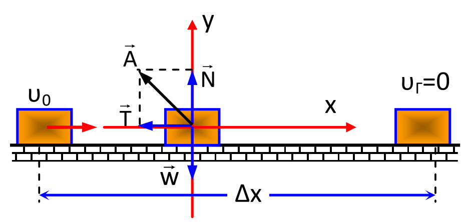
α. Η επιβράδυνση του σώματος

β. Ο χρόνος κίνησης του σώματος μέχρι να σταματήσει

γ. Η μετατόπιση του σώματος τότε.

Λύση

α. Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις: Το βάρος w και η δύναμη A από το δάπεδο που αναλύεται σε δυο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους, την N που είναι κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο και την τριβή T που είναι παράλληλη στο οριζόντιο επίπεδο.



Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί άρα $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$N - w = 0 \Rightarrow N = w$. Αλλά $T = \mu \cdot N \Rightarrow T = \mu \cdot w \Rightarrow T = \mu mg$.

Αν α η επιτάχυνση του σώματος στον άξονα x ισχύει

$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow -T = m\alpha \Rightarrow -\mu mg = m\alpha \Rightarrow \alpha = -\mu g \Rightarrow \alpha = -0,2 \cdot 10 \Rightarrow \alpha = -2$ m/s^2.

β. Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και θα σταματήσει όταν $\upsilon = 0 \Rightarrow$

$\upsilon_0 + \alpha\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta t = -\dfrac{\upsilon_0}{\alpha} \Rightarrow \Delta t = -\dfrac{20}{-2} \Rightarrow \Delta t = 10$ s.

γ. Η μετατόπιση του σώματος τότε είναι $\Delta x = \upsilon_0 \Delta t + \dfrac{1}{2}\alpha \Delta t^2 \Rightarrow \Delta x = 20 \cdot 10 + \dfrac{1}{2}(-2) \cdot 10^2 \Rightarrow \Delta x = 100$ m.

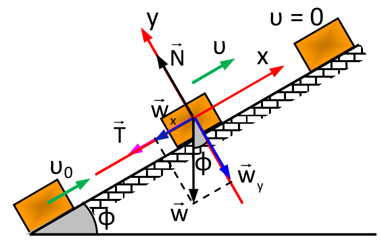
Παράδειγμα 25. Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο

Σώμα εκτοξεύεται από την βάση κεκλιμένου επιπέδου με γωνία κλίσης $\phi = 30^0$ με ταχύτητα $\upsilon_0 = 20$ m/s παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής του σώματος με το επίπεδο είναι $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Δίνεται $g = 10$ m/s^2. Να υπολογιστούν:

α. Η επιβράδυνση του σώματος

β. Ο χρόνος που θα κινηθεί το σώμα και το διάστημα που θα διανύσει μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

Λύση



Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις: Το βάρος w που αναλύεται σε δυο κάθετες συνιστώσες w_x και w_y με $w_x = w\eta\mu\varphi$ και $w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi$ και την αντίδραση του επιπέδου που αναλύεται στην κάθετη αντίδραση N και την τριβή T.

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί άρα $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w_y = 0 \Rightarrow$
$N = w\sigma\upsilon\nu\varphi$ άρα $N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Για την τριβή ισχύει: $T = \mu N \Rightarrow T = \mu w\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi$

Στον άξονα x το σώμα κάνει μεταβαλλόμενη κίνηση άρα $\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow$
$- T - w_x = m\alpha \Rightarrow - \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi - mg\eta\mu\varphi = m\alpha \Rightarrow m\alpha = - mg(\ \mu\sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\varphi\ )$

$$\Rightarrow \alpha = - g(\ \mu\sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\varphi\ ) \Rightarrow \alpha = - 10\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha = - 10\ m/s^2.$$

Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

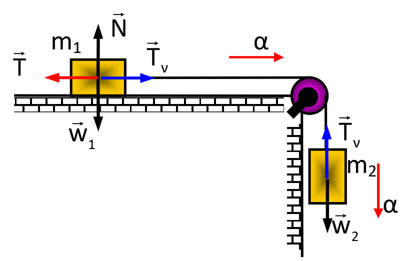
Η ταχύτητα του δίνεται από την σχέση $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha\cdot\Delta t$. Όταν σταματήσει στιγμιαία είναι $\upsilon = 0$ άρα:

$$\upsilon_0 + \alpha\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta t = -\frac{\upsilon_0}{\alpha} \Rightarrow \Delta t = -\frac{20\,m/s}{-10\,m/s^2} \Rightarrow \Delta t = 2\ s.$$

Το σώμα όταν σταματήσει θα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = \upsilon_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \Rightarrow \Delta x = 20\cdot 2 + \frac{1}{2}(\ - 10\ )\cdot 2^2 \Rightarrow$

$\Delta x = 20\ m$.

Παράδειγμα 26. Κίνηση συστήματος σωμάτων



Το σύστημα των σωμάτων του σχήματος κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2\ m/s^2$. Ο συντελεστής τριβής του σώματος με το δάπεδο είναι $\mu = 0{,}2$. Δίνεται $m_1 = 10$ kg και $g = 10\ m/s^2$.

Να υπολογιστούν:

α. Η δύναμη της τριβής

β. Η δύναμη T_v που τείνεται το νήμα

γ. Το βάρος w_2.

Λύση

α. Το σώμα μάζας m_1 ισορροπεί στον άξονα y άρα $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w_1 = 0 \Rightarrow N = m_1g$ άρα η τριβή $T = \mu N \Rightarrow$ $T = \mu m_1g \Rightarrow T = 0{,}2\cdot 10\cdot 10 \Rightarrow T = 20\ N$.

β. Στον άξονα x είναι: $\Sigma F_x = m_1\alpha \Rightarrow T_v - T = m_1\alpha \Rightarrow T_v = m_1\alpha + T \Rightarrow T_v = 10\cdot 2 + 20 \Rightarrow T_v = 40\ N$.

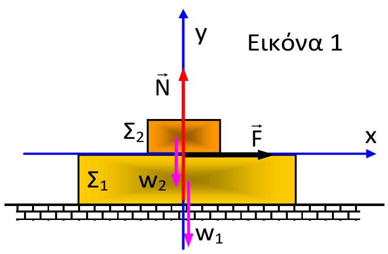
γ. Για το σώμα μάζας m_2 ισχύει: $\Sigma F = m_2\alpha \Rightarrow w_2 - T_v = m_2\alpha \Rightarrow w_2 - T_v = \frac{w_2}{g}\alpha \Rightarrow w_2g - T_vg = w_2\alpha \Rightarrow$

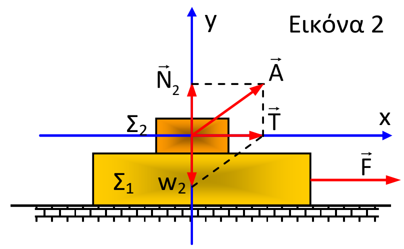
$$w_2\cdot(\ g - \alpha\ ) = T_v\cdot g \Rightarrow w_2 = \frac{T_v\cdot g}{g - \alpha} \Rightarrow w_2 = \frac{40\cdot 10}{10 - 2} \Rightarrow w_2 = 50\ N.$$

Παράδειγμα 27. Κίνηση συστήματος σωμάτων

Δυο σώματα Σ_1 και Σ_2 με αντίστοιχα βάρη $w_1 = 60$ N και $w_2 = 40$ N βρίσκονται το ένα πάνω στο άλλο όπως στο σχήμα. Αν μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής $\mu = 0{,}2$, ενώ μεταξύ του σώματος Σ_1 και του εδάφους δεν υπάρχει τριβή να υπολογιστεί η μέγιστη οριζόντια δύναμη F που πρέπει να ασκηθεί στο Σ_1 ώστε το Σ_2 να είναι ακίνητο.

Λύση





Στο σύστημα των δυο σωμάτων όπως φαίνεται στο πρώτο σχήμα ασκούνται οι δυνάμεις: F, w_1, w_2 και N (Η συνολική αντίδραση του εδάφους που ασκείται στο σώμα w_1).

Για τον άξονα x έχουμε: $\Sigma F_x = m_{ολ}\alpha \Rightarrow F = (m_1 + m_2)\alpha \Rightarrow F = \dfrac{w_1 + w_2}{g}\alpha$ ❶

Στο σώμα Σ_2 όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα ασκούνται οι δυνάμεις: Το βάρος w_2 και η αντίδραση A από το σώμα Σ_1 που αναλύεται στην κάθετη αντίδραση N_2 και την τριβή T.
Για τον άξονα y έχουμε: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - w_2 = 0 \Rightarrow N_2 = w_2 \Rightarrow N_2 = 40$ N.
Για την τριβή T ισχύει $T = \mu N_2 \Rightarrow T = 0{,}2\cdot 40 \Rightarrow T = 8$ N.
Για τον άξονα x έχουμε: $\Sigma F_x = m_2\alpha$ (Γιατί το σώμα συμμετέχει στην κίνηση του συστήματος ενώ είναι ακίνητο ως προς το σώμα Σ_1).

άρα $T = m_2\alpha \Rightarrow T = \dfrac{w_2}{g}\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{T\cdot g}{w_2}$ ❷

Από τις ❶ , ❷ έχουμε : $F = \dfrac{w_1 + w_2}{g}\cdot\dfrac{T\cdot g}{w_2} \Rightarrow F = \dfrac{w_1 + w_2}{w_2}\cdot T \Rightarrow F = \dfrac{60 + 40}{40}\cdot 8 \Rightarrow$ F = 20 N.

Άλυτες Ασκήσεις στα Κεφ 1.2 και 1.3

28. Για ένα ελατήριο που ακολουθεί τον νόμο των ελαστικών παραμορφώσεων (νόμος Hooke) πήραμε τον παρακάτω πίνακα μετρήσεων για την δύναμη και την παραμόρφωση:

F (N)	0	40	100	
x (m)	0	0,2		0,25

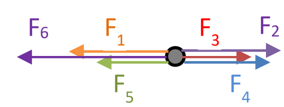
Να γίνει διάγραμμα με βάση αυτές τις τιμές και να συμπληρωθεί ο πίνακας.

29. Δύο δυνάμεις έχουν μέτρα F_1 = 100 N και F_2 = 60 N. Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης, αν οι δυνάμεις έχουν:
α. ίδια κατεύθυνση
β. αντίθετες κατευθύνσεις.
[Απ.: **α.** F = 160 N, **β.** F = 40 N]

30. Τρεις δυνάμεις με μέτρα F_1 = 10 N και F_2 = 10 N με κατεύθυνση προς τα δεξιά και F_3 = 20 N με κατεύθυνση προς τα αριστερά έχουν κοινό σημείο εφαρμογής. Να βρεθεί η συνισταμένη τους.
[Απ.: F = 0]

31. Να βρεθεί η συνιστάμενη δυο δυνάμεων με μέτρα F_1 = 6 N και F_2 = 8 N οι οποίες έχουν κοινό σημείο εφαρμογής και οι φορείς τους σχηματίζουν γωνία **α.** φ = 0^0, **β.** 180^0.

32. Στο σώμα του σχήματος ασκούνται οι δυνάμεις F_1 = 10 N, F_2 = 8 N, F_3 = 4 N, F_4 = 9 N και F_5 = 6 N και F_6 = 12 N που φαίνονται στο σχήμα. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη.

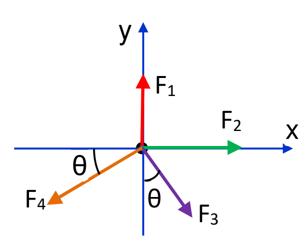


33. Να βρεθεί η συνιστάμενη δυο δυνάμεων με μέτρα F_1 = 6 N και F_2 = 8 N οι οποίες έχουν κοινό σημείο εφαρμογής και η φορείς τους σχηματίζουν ορθή γωνία.

34. Δυο δυνάμεις σχηματίζουν γωνία φ και έχουν μέτρα F_1 = F_2 = 10 N. Να βρεθεί η συνιστάμενη τους όταν φ = 60^0, φ = 90^0, φ = 120^0 και φ = 180^0.

35. Τρεις δυνάμεις με μέτρα 10 N, 10 N και 20 N έχουν κοινό σημείο εφαρμογής και σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120^0. Να βρεθεί η συνισταμένη τους.

36. Το υλικό σημείο του σχήματος δέχεται τις δυνάμεις F_1, F_2, F_3 και F_4 που έχουν μέτρα F_1 = 12 N, F_2 = 16 N, F_3 = 10 N και F_4 = 20 N όπως στο σχήμα. Για την γωνία θ δίνονται: ημθ = 0,6 και συνθ = 0,8 Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η συνιστάμενη των δυνάμεων.



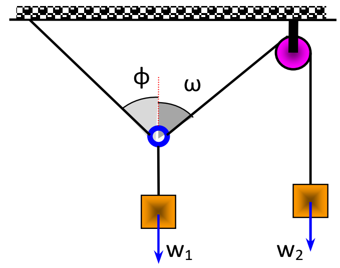
37. Σε ένα υλικό σημείο ασκείται δύναμη μέτρου F_1 = 6 N μαζί με μια άλλη δύναμη F_2. Αν η συνιστάμενη τους έχει μέτρο F = 8 N και ο φορέας της είναι κάθετος στον φορέα της F_1 να βρεθεί το μέτρο της F_2.

38. Στο σύστημα του σχήματος ο μικρός δακτύλιος ισορροπεί όταν οι γωνίες που σχηματίζουν τα νήματα με την κατακόρυφη είναι $\phi = 45^0$ και $\omega = 60^0$. Αν είναι $w_2 = 10$ N να υπολογιστούν:

α. Οι δυνάμεις με τις οποίες τείνοντα τα νήματα

β. Το βάρος w_1.

[Απ.: **α.** $T_1 = 5\sqrt{6}$ N , $T_2 = 10$N, **β.** $w_1 = 5\left(\sqrt{3}+1\right)$N]



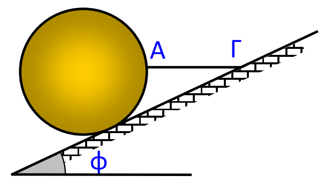
39. Σφαίρα με βάρος $w = 10\sqrt{3}$ N και ακτίνα R ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ. Η σφαίρα συγκρατείται στο επίπεδο με τη βοήθεια οριζόντιου νήματος. Το ένα άκρο του νήματος δένεται στο σημείο Α της σφαίρας και το άλλο στο σημείο Γ του επιπέδου. Αν το μήκος του νήματος είναι ΑΓ = R να υπολογιστούν:

α. Η γωνία φ

β. Η δύναμη με την οποία τείνετε το νήμα

γ. Η δύναμη που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στη σφαίρα.

[Απ.: **α.** $\phi = 30^0$, **β.** T = 10 N, **γ.** N = 20 N]

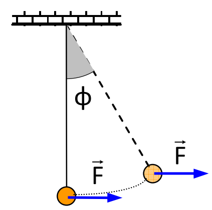


40. Σφαίρα βάρους w = 30 N κρέμεται από σταθερό σημείο μέσω αβαρούς νήματος που έχει όριο θραύσης T = 2w. Στη σφαίρα ασκείται οριζόντια δύναμη F και τότε το νήμα ισορροπεί σε νέα θέση που σχηματίζει με την αρχική θέση γωνία φ. Να υπολογιστούν:

α. Το μέτρο της δύναμης F για γωνίες $\phi = 30^0$ και $\phi = 45^0$

β. Για ποια τιμή της γωνίας φ θα σπάσει το νήμα.

[Απ.: **α.** $F = 10\sqrt{3}$ N , F = 30 N , **β.** $\phi = 60^0$]



41. Ένα σώμα ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο επίπεδο και μετά αρχίζει να ανεβαίνει ολισθαίνοντας σε λείο κεκλιμένο επίπεδο. Να σχεδιάσετε και να περιγράψετε τις δυνάμεις (ποιο σώμα ασκεί τη δύναμη) που ασκούνται στο σώμα όταν αυτό κινείται:

α. Στο οριζόντιο επίπεδο

β. Στο κεκλιμένο επίπεδο

42. Ένα σώμα ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη με μέτρο F = 100 N. Το σώμα σε χρόνο Δt = 10 s αποκτά ταχύτητα υ = 20 m/s. Να βρεθεί η μάζα του σώματος.

[Απ.: m = 50 kg]

43. Ένα σώμα ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F = 20 N. Το σώμα αποκτά ταχύτητα υ = 20 m/s όταν έχει μετατοπιστεί κατά Δx = 100 m. Να βρεθεί η μάζα του σώματος.

[Απ.: m = 10 kg]

44. Αυτοκίνητο με μάζα m = 1200 kg κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα $υ_0$ = 72 Km/h. Ξαφνικά ο οδηγός φρενάρει όποτε το αυτοκίνητο σταματάει αφού μετατοπιστεί κατά Δx = 40 m. Να υπολογιστούν:

α. Το μέτρο της δύναμης που ασκήθηκε στους τροχούς κατά το φρενάρισμα

β. Η χρονική διάρκεια της κίνησης μέχρι να σταματήσει το αυτοκίνητο.

[Απ.: **α.** F = 6000 N, **β.** Δt = 4 s]

45. Σώμα μάζας $m = 5$ kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκούνται δύο οριζόντιες δυνάμεις $F_1 = 20$ N και $F_2 = 10$ N με αντίθετες κατευθύνσεις. Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 4$ s.

[Απ.: $\Delta x = 16$ m]

46. Σε σώμα μάζας $m = 5$ kg που κινείται με ταχύτητα $\upsilon_0 = 5$ m/s σε λείο και οριζόντιο επίπεδο ασκείται σταθερή δύναμη συγγραμμική και ομόρροπη της ταχύτητας. Αν το κινητό σε χρόνο $\Delta t = 5$ s αποκτά ταχύτητα $\upsilon = 5\upsilon_0$ να υπολογιστούν:

α. Το μέτρο της δύναμης F

β. Η μετατόπιση του σώματος στον χρόνο Δt.

[Απ.: **α.** $F = 20$ N, **β.** $\Delta x = 75$ m]

47. Σώμα μάζας $m = 4$ kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη F_1. Το σώμα όταν μετατοπιστεί κατά $\Delta x_1 = 25$ m αποκτά ταχύτητα $\upsilon = 10$ m/s. Τότε η δύναμη F_1 καταργείται και στο σώμα ασκείται σταθερή δύναμη F_2 αντίθετης κατεύθυνσης. Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται όταν το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 125$ m από την αρχική θέση ηρεμίας. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις F_1 και F_2.

[Απ.: $F_1 = 8$ N, $F_2 = 2$ N]

48. Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 6$ kg και $m_2 = 4$ kg ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα σώματα συνδέονται με νήμα που έχει όριο θραύσης $T_\theta = 36$ N. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της οριζόντιας δύναμης που μπορεί να ασκηθεί

α. στο σώμα m_1 για να μην σπάσει το νήμα.

β. στο σώμα m_2 για να μην σπάσει το νήμα.

[Απ.: **α.** $F_{max} = 90$ N, **β.** $F_{max} = 60$ N]

49. Σώμα βάρους w είναι κρεμασμένο από ζυγαριά (με ελατήριο) που βρίσκεται κρεμασμένη στην οροφή ανελκυστήρα. Όταν ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με επιτάχυνση α τότε η ένδειξη της ζυγαριάς είναι $A_1 = 120$ N, ενώ όταν κατεβαίνει με την ίδια επιτάχυνση η ένδειξη της ζυγαριάς είναι $A_2 = 80$ N. Δίνεται $g = 10$ m/s^2. Να υπολογιστούν:

α. Το βάρος w του σώματος

β. Η επιτάχυνση του ανελκυστήρα.

[Απ.: **α.** $w = 100$ N, **β.** $\alpha = 2$ m/s^2]

50. Σώμα βάρους $w = 500$ N είναι τοποθετημένο σε ζυγό με ελατήριο που βρίσκεται στο δάπεδο ανελκυστήρα. Δίνεται $g = 10$ m/s^2. Να υπολογιστεί η ένδειξη του ζυγού στις εξής περιπτώσεις:

α. Ο ανελκυστήρας κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 5$ m/s

β. Ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2$ m/s^2

γ. Ο ανελκυστήρας κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2$ m/s^2

δ. Ο ανελκυστήρας κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 10$ m/s^2

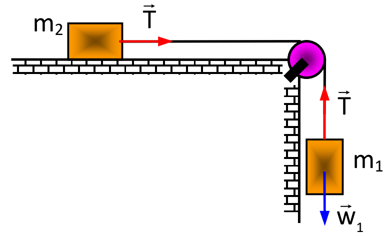
ε. Ο ανελκυστήρας κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 12$ m/s^2

[Απ.: **α.** $A = 500$ N, **β.** $A = 600$ N, **γ.** $A = 400$ N, **δ.** $A = 0$, **ε.** $A = -100$ N]

51. Σώμα μάζας $m = 2$ kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 4$ N στην χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 2$ s. Από $t_1 = 2$ s έως $t_2 = 6$ s παύει να ασκείται η δύναμη. Από την χρονική στιγμή $t_2 = 6$ s και μετά ασκείται στο σώμα η ίδια δύναμη. Να βρεθεί η μετατόπιση του σώματος την χρονική στιγμή $t_3 = 8$ s.

[Απ.: $\Delta x = 32$ m]

52. Τα σώματα του σχήματος με μάζες m_1 και m_2 = 3 kg αρχικά συγκρατούνται ακίνητα. Όταν αφήνονται ελεύθερα η τάση του νήματος είναι Τ = 12 Ν. Δίνεται g = 10 m/s^2, η τροχαλία θεωρείται αβαρής και χωρίς τριβή, το νήμα ιδανικό και το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Να υπολογιστούν:



α. Η επιτάχυνση των δύο σωμάτων
β. Η μάζα m_1.

[Απ.: **α.** α = 4 m/s^2, **β.** m_1 = 2 kg]

53. Σώμα με μάζα m = 20 kg βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και ηρεμεί. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F = 50 N οπότε το σώμα αποκτά ταχύτητα υ = 6 m/s αφού μετατοπιστεί κατά Δx = 18 m.
α. Να εξετάσετε αν υπάρχει τριβή ανάμεσα στο σώμα και το δάπεδο και να υπολογιστεί το μέτρο της.
β. Αν δίνεται g = 10 m/s^2 να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ.

[Απ.: **α.** Τ = 30 Ν, **β.** μ = 0,15]

54. Ένας κύβος με μάζα m = 10 kg σύρεται με οριζόντια δύναμη F σε οριζόντιο επίπεδο με επιτάχυνση α = 2,5 m/s^2. Αν δίνεται g = 10 m/s^2 και ο συντελεστής τριβής μεταξύ του κύβου και του επίπεδου μ = 0,2 να υπολογιστούν:
α. Η κάθετη δύναμη που ασκεί το οριζόντιο επίπεδο στο σώμα.
β. Η δύναμη F.

[Απ.: **α.** Ν = 100 Ν, **β.** F = 45 N]

55. Ένα σώμα μάζας m κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,2. Την χρονική στιγμή t_0 = 0 το σώμα έχει ταχύτητα $υ_0$ και βρίσκεται στην θέση x_0 = 0. Σε χρονική διάρκεια Δt το σώμα σταματάει. Η μετατόπισή του τότε είναι Δx = 25 m. Αν g = 10 m/s^2 να υπολογιστούν :
α. Η επιβράδυνση του σώματος
β. Η αρχική ταχύτητα $υ_0$
γ. Η χρονική διάρκεια Δt

[Απ.: **α.** α = – 2 m/s^2, **β.** $υ_0$ = 10 m/s, **γ.** Δt = 5 s]

56. Ένα σώμα μάζας m = 2 kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,5. Στο σώμα ασκείται την χρονική στιγμή t_0 = 0 δύναμη F = 20 N η οποία σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία φ με συνφ = 0,8 και ημφ = 0,6. Αν g = 10 m/s^2 να υπολογιστούν :
α. Η δύναμη της τριβής Τ και η επιτάχυνση α που αποκτά το σώμα
β. Η χρονική διάρκεια Δt που απαιτείται για να αποκτήσει το σώμα ταχύτητα υ = 30 m/s
γ. Η μετατόπιση του σώματος τότε

[Απ.: **α.** Τ = 4 Ν, α = 6 m/s^2, **β.** Δt = 5 s, **γ.** Δx = 75 m]

57. Σώμα αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα σε ένα σημείο κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ = 30^0. Το σώμα κατεβαίνει ολισθαίνοντας. Δίνεται g = 10 m/s^2. Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος και το διάστημα που διανύει σε χρόνο Δt = 2 s.
α. Αν δεν υπάρχει τριβή.
β. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι μ = $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

[Απ.: **α.** α = 5 m/s^2, Δx = 10 m, **β.** α = 2 m/s^2, Δx = 4 m]

58. Ένα σώμα μάζας m = 2 kg αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα σε ένα σημείο κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ με συνφ = 0,8 και ημφ = 0,6. Το σώμα παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,5 με το επίπεδο. Αν g = 10 m/s^2 να υπολογιστούν:

α. Η δύναμη της τριβής Τ

β. Η επιτάχυνση α που αποκτά το σώμα

γ. Ο χρόνος Δt που απαιτείται για να μετατοπιστεί το σώμα κατά Δx = 100 m

δ. Η ταχύτητα του σώματος τότε.

[Απ.: **α.** Τ = 8 Ν, α = 2 m/s^2, **β.** Δt = 10 s, **γ.** υ = 20 m/s]

59. Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ = 30^0 και ύψους h = 2 m αφήνουμε να ολισθήσει από το ανώτατο σημείο ένα σώμα. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ και δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2 να υπολογιστούν:

α. Η επιτάχυνση του σώματος.

β. Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

[Απ.: **α.** α = 2 m/s^2, **β.** Δt = 2 s]

60. Ένα σώμα μάζας m = 1 kg εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $υ_0$ = 20 m/s προς τα επάνω παράλληλα στην επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ = 30^0. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ και δίνεται g = 10 m/s^2, να υπολογιστούν:

α. Η δύναμη της τριβής Τ και η επιβράδυνση α που αποκτά το σώμα

β. Ο χρόνος Δt που απαιτείται για να σταματήσει στιγμιαία το σώμα

γ. Η μετατόπιση του σώματος τότε

δ. Θα ξεκινήσει το σώμα να κινείται προς τα κάτω;

[Απ.: **α.** Τ = 3 Ν, α = – 8 m/s^2, **β.** Δt = 2,5 s, **γ.** Δx = 25 m, **δ.** ναι]

61. Ένα σώμα μάζας m = 2 kg ανεβαίνει προς τα επάνω παράλληλα στην επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ με την βοήθεια δύναμης F = 30 N της οποίας η διεύθυνση είναι παράλληλη στην επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι μ = 0,5, δίνεται g = 10 m/s^2 και συνφ = 0,8, ημφ = 0,6 και την t_0 = 0 είναι $υ_0$ = 0, να υπολογιστούν :

α. Η δύναμη της τριβής Τ

β. Η επιτάχυνση α που αποκτά το σώμα

γ. Ο χρόνος Δt και η μετατόπιση Δx για να αποκτήσει το σώμα υ = 40 m/s

[Απ.: **α.** Τ = 8 Ν, **β.** α = 5 m/s^2, **γ.** Δt = 8 s, Δx = 160 m]

62. Ένα σώμα μάζας m = 2 kg ανεβαίνει προς τα επάνω παράλληλα στην επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ με την βοήθεια δύναμης F = 60 N της οποίας η διεύθυνση είναι **οριζόντια**. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι μ = 0,5, δίνεται g = 10 m/s^2, για την γωνία φ είναι συνφ = 0,8, ημφ = 0,6 και την t_0 = 0 είναι $υ_0$ = 0, να υπολογιστούν:

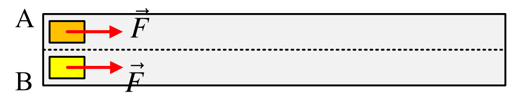
α. Η δύναμη της τριβής Τ

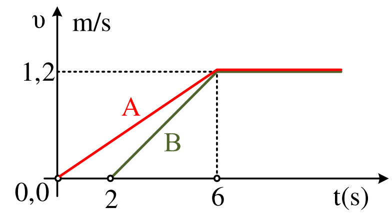
β. Η επιτάχυνση α που αποκτά το σώμα

γ. Ο χρόνος Δt και η μετατόπιση Δx για να αποκτήσει το σώμα υ = 20 m/s

[Απ.: **α.** Τ = 26 Ν, **β.** α = 5 m/s^2, **γ.** Δt = 4 s, Δx = 40 m]

63. Δύο σώματα Α και Β ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, το ένα δίπλα στο άλλο, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Στα σώματα ασκείται η ίδια δύναμη F (όχι ταυτόχρονα), με αποτέλεσμα να κινηθούν οριζόντια στην ίδια διεύθυνση και η ταχύτητά τους να μεταβάλλεται σύμφωνα με το διάγραμμα.





Α. Επί πόσο χρονικό διάστημα ασκήθηκε η δύναμη σε κάθε σώμα;

Αν το σώμα Α έχει μάζα $m_1 = 4{,}5$ kg:

Β. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σώματος Α την στιγμή $t_1 = 1{,}5$ s.

Γ. Ποια η θέση του σώματος Α την χρονική στιγμή $t_2 = 6$ s.

Δ. Να βρεθεί η μάζα m_2 του Β σώματος.

Ε. Ποια η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τη στιγμή t_2, καθώς και τη στιγμή $t_3 = 7{,}5$ s.

64. Σώμα με μάζα m = 2 kg βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και ηρεμεί. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F = 12 N και αποκτά ταχύτητα υ = 6 m/s σε χρόνο Δt = 2 s. Δίνεται g = 10 m/s^2. Να υπολογιστούν:

α. Η δύναμη της τριβής Τ.

β. Ο συντελεστής τριβής σώματος – επιπέδου.

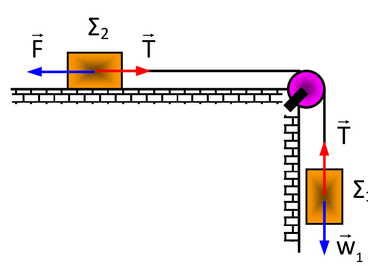
γ. Αν η δύναμη πάψει να ενεργεί μετά από χρόνο Δt = 2 s μετά την εφαρμογή της να υπολογιστεί μετά από πόσο συνολικό χρόνο θα σταματήσει το σώμα και ποια θα είναι η συνολική μετατόπισή του.

[Απ.: **α.** Τ = 6 Ν, **β.** μ = 0,3, **γ.** $\Delta t_{ολ} = 4$ s, $\Delta x_{ολ} = 12$ m]

65. Ένα σώμα ηρεμεί σε λείο και οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται δύναμη F που σχηματίζει γωνία φ = 30^0 με το οριζόντιο επίπεδο ώστε η αντίδραση από το επίπεδο να είναι ίση με μηδέν. Να υπολογιστεί ο χρόνος στον οποίο το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta x = 20\sqrt{3}$ m. Δίνεται g = 10 m/s^2.

[Απ.: Δt = 2 s]

66. Στην διάταξη του σχήματος τα βάρη των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι αντίστοιχα $w_1 = 60$ N και $w_2 = 40$ N, ενώ ο συντελεστής τριβής του $Σ_2$ με το δάπεδο είναι μ = 0,2. Δίνεται g = 10 m/s^2.

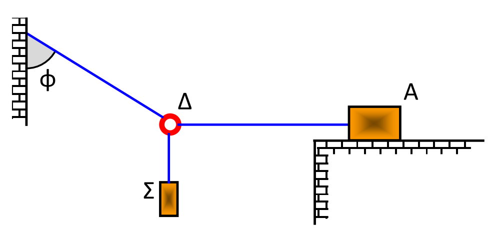


α. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F που πρέπει να ασκηθεί οριζόντια στο σώμα $Σ_2$ ώστε το σώμα $Σ_1$ να ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση α = 0,5 m/s^2.

β. Με ποια δύναμη τείνεται το νήμα τότε.

[Απ.: **α.** F = 73 N, **β.** T = 63 N]

67. Στη διάταξη του σχήματος το σώμα Α έχει βάρος $w_1 = 80$ N και συντελεστή τριβής με το δάπεδο μ = 0,3. Αν είναι φ = 45^0 να υπολογιστούν:



α. Το μέγιστο βάρος του σώματος w_x ώστε το σύστημα να ισορροπεί.

β. Οι δυνάμεις στα νήματα τότε.

[Απ.: **α.** $w_x = 24$ N]

68. Ένας μαθητής κρατάει ανάμεσα στις παλάμες των δύο χεριών του κατακόρυφα ένα βιβλίο με μάζα m = 0,8 kg πιέζοντας το με κάθετη δύναμη $F_k = 5$ N. Δίνεται g = 10 m/s^2. Να υπολογιστούν:

α. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στα χέρια του μαθητή και το βιβλίο.

β. Η δύναμη που ασκεί ο μαθητής στο βιβλίο (μέτρο και διεύθυνση).

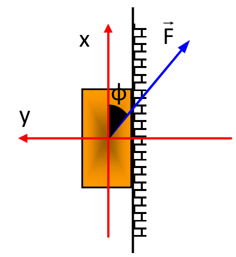
[Απ.: **α.** μ = 0,8, **β.** A = 6,4 N με εφφ = 1,25]

69. Σώμα με μάζα m = 16 kg κινείται υπό την επίδραση δύναμης F σε κατακόρυφο τοίχο όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής σώματος – τοίχου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ και $\phi = 60^0$. Αν δίνεται $g = 10\ m/s^2$ να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F για να μετατοπιστεί το σώμα με σταθερή ταχύτητα:

α. προς τα επάνω.

β. προς τα κάτω.

[Απ.: **α.** F = 800 N, **β.** F = 200 N]

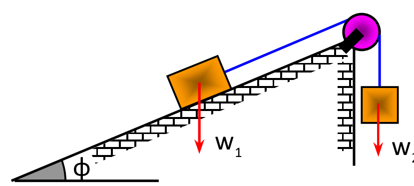


70. Σε έναν άγνωστο πλανήτη, ένα σώμα χωρίς αρχική ταχύτητα, χρειάζεται διπλάσιο χρόνο για να ολισθήσει σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσης θ, με εφθ = 0,8, παρά σε ένα όμοιο λείο κεκλιμένο επίπεδο της ίδιας κλίσης. Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.

[Απ. : μ = 0,6]

71. Το σώμα βάρους w_1 = 100 N που είναι τοποθετημένο σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi = 30^0$ είναι δεμένο με νήμα με άλλο σώμα βάρους w_2 όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ να βρεθεί ανάμεσα σε ποιες τιμές πρέπει να βρίσκεται το βάρος w_2 ώστε το w_1 να ισορροπεί.

[Απ.: $20\ N \le w_2 \le 80\ N$]



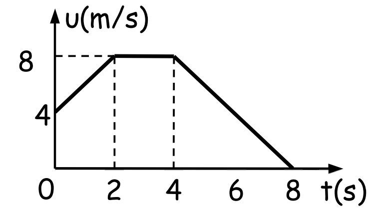
72. Σώμα ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ με $\upsilon_0 = 0$, μετατοπίζεται κατά Δx_0 και συνεχίζει χωρίς διακοπή να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο οπότε μετατοπίζεται κατά Δx και ηρεμεί. Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής μ αν έχει την ίδια τιμή και στα δυο επίπεδα. Δίνεται η γωνία $\phi = 60^0$ και ο λόγος $\kappa = \frac{\Delta x}{\Delta x_0} = 2$.

[Απ.: $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$]

Αντί για Επανάληψη

Άσκηση 73

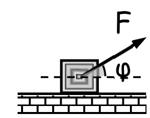
Σώμα μάζας m = 2 kg κινείται ευθύγραμμα και το διάγραμμα της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνεται στο σχήμα.



Α. Να περιγραφούν τα είδη των κινήσεων από $t_0 = 0$ έως $t = 8$ s.
Β. Να κατασκευαστεί το αντίστοιχο διάγραμμα της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με τον χρόνο.
Γ. Να υπολογιστεί η μετατόπιση του σώματος Δx στην χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως $t = 8$ s.
Δ. Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα του σώματος στην χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως $t = 8$ s.
Ε. Να υπολογίσετε την θέση του σώματος την χρονική στιγμή $t = 4$ s, αν δίνεται ότι για $t_0 = 0$ είναι $x_0 = 10$ m.

Άσκηση 74

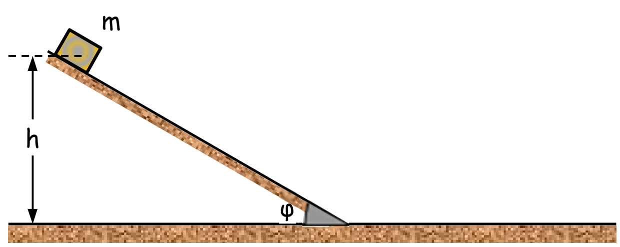
Σώμα μάζας m = 2 kg είναι αρχικά ακίνητο στην θέση $x_0 = 5$ m σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0{,}5$. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο σώμα σταθερή δύναμη F = 15 N, η οποία σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο. Δίνεται συνφ = 0,6, ημφ = 0,8 και $g = 10$ m/s^2.



Α. Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή t_1 το σώμα θα κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1 = 30$ m/s.
Β. Την χρονική στιγμή t_1 καταργείται η δύναμη F. Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή t_2 ακινητοποιείται το σώμα.
Γ. Να υπολογίσετε την συνολική μετατόπιση του σώματος και την τελική του θέση όταν σταματήσει.
Δ. Να υπολογίσετε την μέση ταχύτητα του σώματος στην χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως t_2.

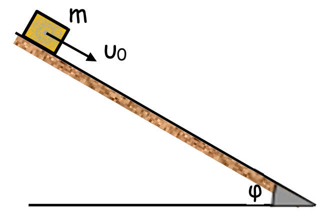
Άσκηση 75

Σώμα μάζας m αφήνεται να κινηθεί από ύψος h, κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ χωρίς αρχική ταχύτητα. Το κεκλιμένο επίπεδο σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία φ: ημφ = 0,8 και συνφ = 0,6, όπως στο σχήμα. Το σώμα παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0{,}8$ με το κεκλιμένο επίπεδο και δίνεται $g = 10$ m/s^2. Το σώμα φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\upsilon_1 = 8$ m/s.



Α. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος στο κεκλιμένο επίπεδο.
Β. Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή t_1 το σώμα φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο και το ύψος h.
Γ. Αν ο συντελεστής τριβής σώματος – δαπέδου στο οριζόντιο επίπεδο είναι πάλι $\mu = 0{,}8$ να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος στο οριζόντιο επίπεδο.
Δ. Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή t_2 το σώμα σταματάει και να κατασκευάσετε το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου.
Ε. Να υπολογίσετε την συνολική μετατόπιση και την μέση ταχύτητα του σώματος.

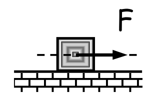
Άσκηση 76



Σώμα μάζας m εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $υ_0$ = 10 m/s προς τα κάτω, κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου. Το σώμα παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ με το κεκλιμένο επίπεδο. Το κεκλιμένο επίπεδο σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία φ = 30^0, όπως στο σχήμα. Το σώμα σταματάει όταν έχει μετατοπιστεί κατά Δx = 20 m. Δίνεται g = 10 m/s² και $ημφ = \frac{1}{2}$, $συνφ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Α. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος.
Β. Να υπολογίσετε την χρονική διάρκεια Δt κίνησης του σώματος.
Γ. Να υπολογίσετε τον συντελεστής τριβής σώματος – δαπέδου.
Δ. Με ποια ταχύτητα $υ_1$ πρέπει να εκτοξεύσουμε το σώμα παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο, ώστε αυτό να σταματήσει στιγμιαία στην αρχική του θέση. Το σώμα θα ξεκινήσει μετά προς τα κάτω;

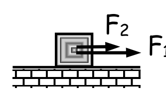
Άσκηση 77



Σώμα μάζας m = 4 kg είναι αρχικά ακίνητο στην θέση x_0 = 0 σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,5. Την χρονική στιγμή t_0 = 0 ασκείται στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη F = 60 N. Δίνεται g = 10 m/s².

Α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα και την θέση του σώματος την χρονική στιγμή t_1 = 2 s.
Β. Την χρονική στιγμή t_1 = 2 s το σώμα σπάει σε δύο κομμάτια με μάζες m_1 = 1 kg και m_2 = 3 kg αντίστοιχα. Η δύναμη F εξακολουθεί να ασκείται στο τμήμα μάζας m_2. Να υπολογίσετε τις νέες επιταχύνσεις των δύο μαζών αν ο συντελεστής τριβής παραμένει ίδιος.
Γ. Να υπολογίσετε την θέση των δύο σωμάτων και την απόστασή τους την χρονική στιγμή t_2 που ακινητοποιείται το σώμα μάζας m_1.
Δ. Να κατασκευάσετε σε ένα διάγραμμα, το διάγραμμα ταχυτήτων του σώματος m και των σωμάτων m_1 και m_2 στην χρονική διάρκεια από t_0 = 0 έως t_2.

Άσκηση 78



Σε ένα σχολείο του πλανήτη Χ, όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 8 m/s², το 2100 οι μαθητές έκαναν το παρακάτω πείραμα. Σώμα έχει μάζα m και ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,5, στην θέση x_0 = 0. Την χρονική στιγμή t_0 = 0 στο σώμα ασκούνται δύο οριζόντιες δυνάμεις, η $F_1 = \frac{3mg}{2}$ και η $F_2 = \frac{mg}{2}$ όπως στο σχήμα.

Α. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος, την ταχύτητα $υ_1$ και την θέση του σώματος x_1 την χρονική στιγμή t_1 = 5 s.

Την χρονική στιγμή t_1 = 5 s καταργείται η δύναμη F_1.

Β. Τι κίνηση εκτελεί το σώμα μετά την χρονική στιγμή t_1; Την χρονική στιγμή t_2 = 10 s ποια θα είναι η ταχύτητα $υ_2$ και ποια η θέση x_2 του σώματος;

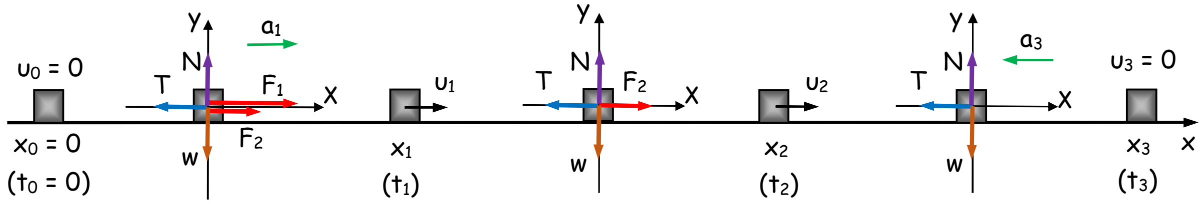
Την χρονική στιγμή t_2 = 10 s καταργείται και η δύναμη F_2 με αποτέλεσμα το σώμα να σταματήσει την χρονική στιγμή t_3.

Γ. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση $α_3$ του σώματος (επιβράδυνση), την χρονική στιγμή t_3 και την θέση x_3 που σταματάει το σώμα.

Δ. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για το σώμα από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως την χρονική στιγμή t_3 που σταματάει.

Ε. Να υπολογίσετε την μέση διανυσματική και την μέση αριθμητική ταχύτητα σώματος από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως την χρονική στιγμή t_3 που σταματάει.

Λύση

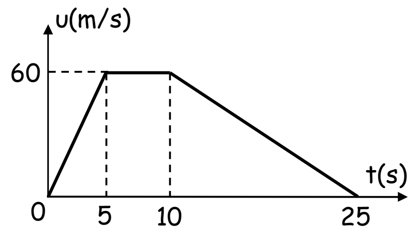


Α. Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις F_1, F_2, w και η αντίδραση A του δαπέδου που αναλύεται στην δύναμη κάθετης αντίδρασης N και την τριβή T (στο σχήμα είναι σχεδιασμένες μόνο οι συνιστώσες της A).
Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί: $\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w = 0 \rightarrow N = m\cdot g$.
Ο νόμος της τριβής ολίσθησης δίνει $T = \mu\cdot N \rightarrow T = \mu\cdot m\cdot g$ ①
Στον άξονα x ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής: $\Sigma F_x = m\cdot a_1 \rightarrow F_1 + F_2 - T = m\cdot a_1$ η οποία με αντικατάσταση των δυνάμεων και χρήση της ① γράφεται: $\frac{3\cancel{m}\cdot g}{2}+\frac{\cancel{m}\cdot g}{2}-\mu\cdot\cancel{m}\cdot g=\cancel{m}\cdot a_1 \rightarrow 2g - \mu\cdot g = a_1 \rightarrow a_1 = (2 - \mu)g$
$\rightarrow a_1 = (2 - 0{,}5)8 \rightarrow$ $\boldsymbol{a_1 = 12\ m/s^2}$.
Άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Την $t_1 = 5$ s:
Για την ταχύτητα $υ_1$ έχουμε: $υ_1 = υ_0 + a_1(t_1 - t_0) \rightarrow υ_1 = 0 + 12(5 - 0) \rightarrow$ $\boldsymbol{υ_1 = 60\ m/s}$.
Για την θέση x_1 έχουμε: $x_1 = x_0 + υ_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_1(t_1 - t_0)^2 \rightarrow x_1 = 0 + 0(5-0) + \frac{1}{2}12(5-0)^2 \rightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = 150\ m}$.

Β. Όταν καταργούμε την δύναμη F_1 η ισορροπία των δυνάμεων στον άξονα y δεν αλλάζει, άρα η τριβή παραμένει ίδια.
Στον άξονα x ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής: $\Sigma F_x = m\cdot a_2 \rightarrow F_2 - T = m\cdot a_2$ η οποία με αντικατάσταση των δυνάμεων και χρήση της ① γράφεται: $\frac{\cancel{m}\cdot g}{2}-\mu\cdot\cancel{m}\cdot g=\cancel{m}\cdot a_2 \rightarrow \frac{g}{2}-\mu\cdot g=a_2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}-\mu\right)g=a_2 \rightarrow$
$a_2=\left(\frac{1}{2}-\mu\right)g \rightarrow a_2 = (0{,}5 - 0{,}5)8 \rightarrow$ $\boldsymbol{a_2 = 0}$.
Άρα το σώμα, μετά την χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
Στην Ε.Ο.Κ η ταχύτητα είναι σταθερή άρα για την ταχύτητα $υ_2$ την $t_2 = 10$ s έχουμε: $υ_2 = υ_1 \rightarrow$ $\boldsymbol{υ_2 = 60\ m/s}$.
Για την θέση x_2 την $t_2 = 10$ s έχουμε: $x_2 = x_1 + υ_1(t_2 - t_1) \rightarrow x_2 = 150 + 60(10 - 5) \rightarrow$ $\boldsymbol{x_2 = 450\ m}$.

Γ. Όταν καταργούμε και την δύναμη F_2 η ισορροπία των δυνάμεων στον άξονα y δεν αλλάζει, άρα η τριβή παραμένει ίδια.
Στον άξονα x ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής: $\Sigma F_x = m\cdot a_3 \rightarrow -T = m\cdot a_3$ η οποία με χρήση της ① γράφεται: $-\mu\cdot\cancel{m}\cdot g=\cancel{m}\cdot a_3 \rightarrow -\mu\cdot g=a_3 \rightarrow a_3 = -\mu\cdot g \rightarrow a_3 = -0{,}5\cdot 8 \rightarrow$ $\boldsymbol{a_3 = -4\ m/s^2}$.
Άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρνητική επιτάχυνση (επιβραδυνόμενη κίνηση).
Όταν το σώμα σταματάει την χρονική στιγμή t_3 η ταχύτητα είναι $υ_3 = 0$ στην θέση x_3.
Για την ταχύτητα $υ_3$ έχουμε: $υ_3 = υ_2 + a_3(t_3 - t_2) \rightarrow 0 = 60 + (-4)(t_3 - 10) \rightarrow 0 = 60 - 4\cdot t_3 + 40 \rightarrow 4\cdot t_3 = 100$
$\rightarrow t_3 = 25$ s. Επομένως το σώμα σταματάει την χρονική στιγμή $\boldsymbol{t_3 = 25\ s}$.
Για την θέση x_3 έχουμε: $x_3 = x_2 + υ_2(t_3 - t_2) + \frac{1}{2}a_3(t_3 - t_2)^2 \rightarrow x_3 = 450 + 60(25-10) + \frac{1}{2}(-4)(25-10)^2 \rightarrow$
$x_3 = 450 + 900 - 450 \rightarrow$ $\boldsymbol{x_3 = 900\ m}$.

Δ. Από τις επιλύσεις των Α, Β, Γ έχουμε τις παρακάτω τιμές για τα ζεύγη (χρονική στιγμή – ταχύτητα) (t, υ): (0, 0), (5 s, 60 m/s), (10 s, 60 m/s), (25 s, 0). Από αυτά κατασκευάζουμε το παρακάτω διάγραμμα:



Από το εμβαδόν στο διάγραμμα μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική μετατόπιση:

Δx = Εμβαδόν → $\Delta x = \frac{(25+5)\cdot 60}{2}$ → $\mathbf{\Delta x = 900\ m}$.

[Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της μετατόπισης $\Delta x = x_3 - x_0$ → $\Delta x = 900 - 0$ → $\mathbf{\Delta x = 900\ m}$.]

Ε. Επειδή δεν έχουμε αλλαγή κατεύθυνσης κατά την κίνηση, το διάστημα s είναι ίσο με την μετατόπιση Δx, επομένως και η μέση αριθμητική ταχύτητα υ_μ είναι ίση με το μέτρο της μέσης διανυσματικής ταχύτητας $\bar{\upsilon}$.

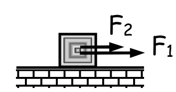
Είναι $\bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ → $\bar{\upsilon} = \frac{900\ m}{25\ s}$ → $\mathbf{\bar{\upsilon} = 36\ m/s}$.

Με βάση την παραπάνω άσκηση μπορούν να λυθούν οι παρακάτω ασκήσεις:

Η άσκηση 79 είναι απλοποιημένη εκδοχή της άσκησης 78, η άσκηση 80 είναι παρόμοιας δυσκολίας με την άσκηση 78 ενώ η άσκηση 81 είναι μεγάλης δυσκολίας σε σχέση με την άσκηση 78.

Άσκηση 79

Σώμα μάζας m = 2 kg είναι αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,2. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκούνται στο σώμα δύο σταθερές οριζόντιες δυνάμεις με μέτρα $F_1 = 8$ N και $F_2 = 4$ N, όπως στο σχήμα. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.



Α. Την χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s καταργείται η δύναμη F_1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση α_1 του σώματος για το χρονικό διάστημα από t_0 έως t_1 και την ταχύτητά του την χρονική στιγμή t_1.

Την χρονική στιγμή $t_2 = 10$ s καταργείται και η δύναμη F_2. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση α_2 του σώματος για το χρονικό διάστημα από t_1 έως t_2 και την ταχύτητά του την χρονική στιγμή t_2.

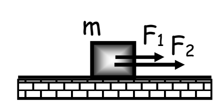
Β. Το σώμα ακινητοποιείται την χρονική στιγμή t_3. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση α_3 του σώματος για το χρονικό διάστημα από t_2 έως t_3 και την χρονική στιγμή t_3 που ακινητοποιείται το σώμα.

Γ. Να κατασκευαστεί το αντίστοιχο διάγραμμα της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Δ. Να υπολογίσετε την συνολική μετατόπιση και την μέση διανυσματική ταχύτητα σώματος από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως την χρονική στιγμή t_3 που σταματάει.

Άσκηση 80

Σε ένα σχολείο του πλανήτη Άρη το 2080 οι μαθητές έκαναν το παρακάτω πείραμα. Σώμα έχει μάζα m και ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \frac{1}{4}$. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις η $F_1 = \frac{mg}{4}$ και η $F_2 = \frac{mg}{2}$ όπως στο σχήμα, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας του Άρη. Την χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s το σώμα έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = 8$ m/s. Την χρονική στιγμή t_1 καταργείται η δύναμη F_2 και την



χρονική στιγμή t_2 = 8 s καταργείται και η δύναμη F_1 με αποτέλεσμα το σώμα να σταματήσει την χρονική στιγμή t_3.

Α. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας g στον Άρη.

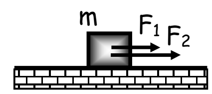
Β. Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_3 που σταματάει το σώμα.

Γ. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για το σώμα από την χρονική στιγμή t_0 = 0 έως την χρονική στιγμή t_3 που σταματάει.

Δ. Να υπολογίσετε την μετατόπιση του σώματος την χρονική στιγμή t_3 που σταματάει.

Άσκηση 81

Σε ένα σχολείο του πλανήτη Άρη το 2080 οι μαθητές έκαναν το παρακάτω πείραμα. Σώμα έχει μάζα m και ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \frac{1}{4}$. Την χρονική στιγμή t_0 = 0 στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις η $F_1 = \frac{mg}{4}$ και η $F_2 = \frac{mg}{2}$ όπως στο σχήμα, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας του Άρη. Την χρονική στιγμή t_1 καταργείται η δύναμη F_2 και την χρονική στιγμή $t_2 = 2t_1$ καταργείται και η δύναμη F_1 με αποτέλεσμα το σώμα να σταματήσει την χρονική στιγμή t_3.



Α. Να υπολογίσετε τις επιταχύνσεις των κινήσεων σε συνάρτηση με το g.

Β. Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_3 που σταματάει το σώμα σε συνάρτηση με το t_1.

Γ. Να κατασκευάσετε ποιοτικό διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για το σώμα από την χρονική στιγμή t_0 = 0 έως την χρονική στιγμή t_3 που σταματάει. Οι ταχύτητες να δίνονται σε συνάρτηση των g, t_1.

Δ. Αν η συνολική μετατόπιση του σώματος την χρονική στιγμή t_3 που σταματάει είναι $\Delta x = \left(5t_1^2\right)$m να υπολογίσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας του Άρη.